

# C/E síť (Condition/Event Nets)

# 1. Případy a kroky

## ❖ Základní sémantika C/E sítí:

- prvky z množiny  $P$  označují booleovské *podmínky* (conditions)
- prvky z množiny  $T$  označují *události* (events)

## ❖ **Definice 1.1:** Necht' $N = (B, E, F)$ je síť.

1. Podmnožina  $c \subseteq B$  se nazývá *případ* (case)
2. Necht'  $e \in E$  a  $c \subseteq B$ . Událost  $e$  je *proveditelná*, přesněji  *$c$ -proveditelná*, jestliže

$$\bullet e \subseteq c \wedge e^\bullet \cap c = \emptyset$$

3. Necht'  $e \in E$ ,  $c \subseteq B$  a necht'  $e$  je  $c$ -proveditelná. Případ  $c'$

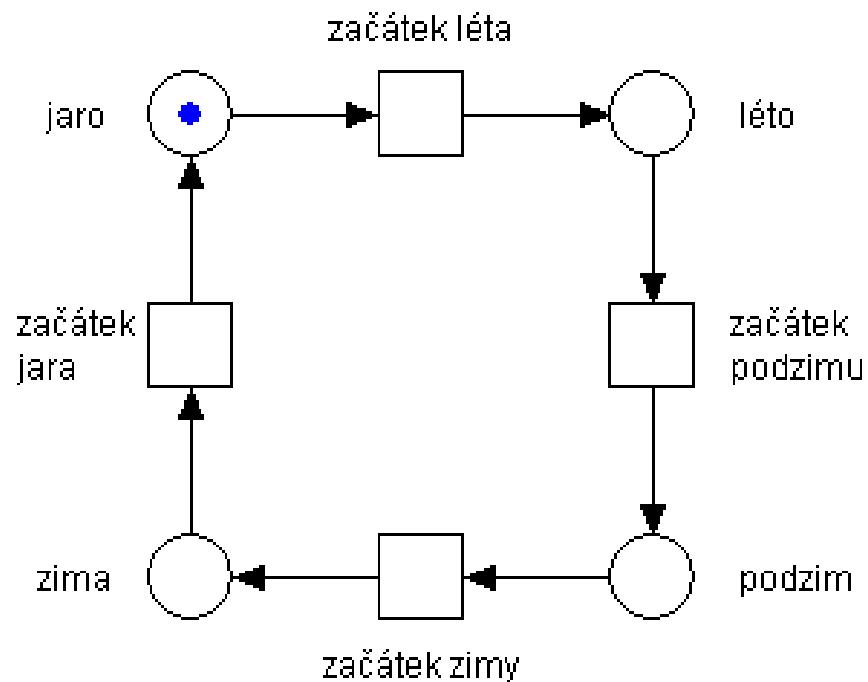
$$c' = (c \setminus \bullet e) \cup e^\bullet$$

se nazývá *následným případem*  $c$  (následníkem k  $c$ ) při události  $e$ . Píšeme

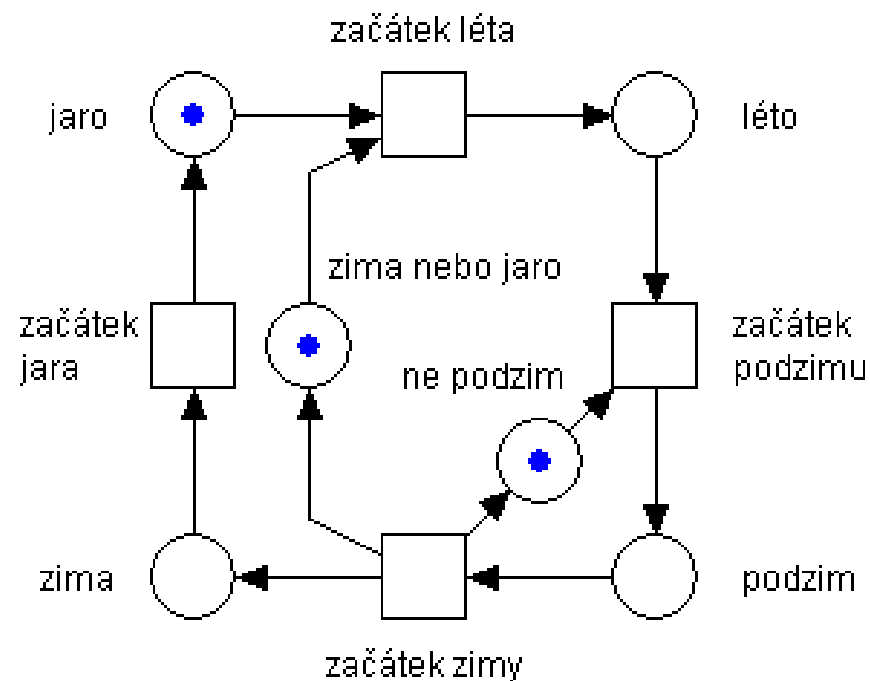
$$c[e]c'$$

**Poznámka:** Grafické vyznačení případu  $c$ : množina podmínek s tečkami (značkami)

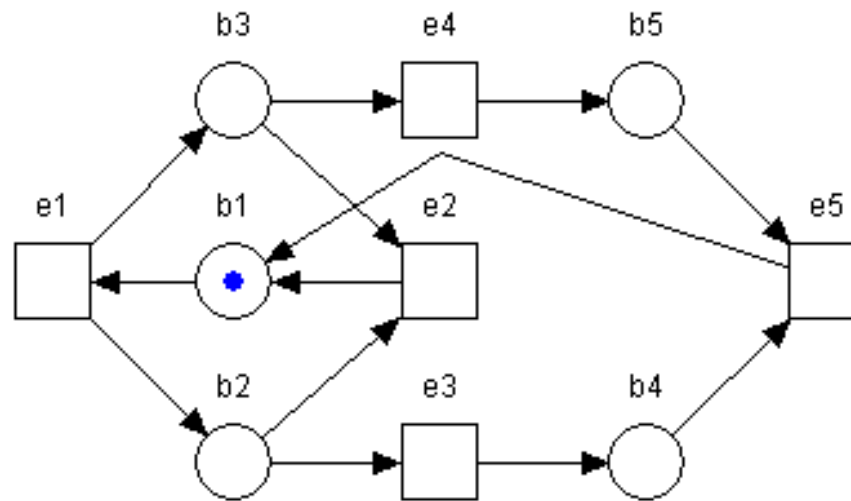
❖ **Příklad 1:** Model změn ročních období



❖ **Příklad 2:** Alternativní model příkladu 1



### ❖ Příklad 3: Ilustrační příklad



$\{b_1\} [e_1] \{b_2, b_3\} [e_4] \{b_2, b_5\} [e_3] \{b_4, b_5\} [e_5] \{b_1\}$

Různé typy událostí:

- $e_1$  předchází  $e_3$  i  $e_4$
- $e_3, e_4$  jsou alternativy k  $e_2$
- $e_3, e_4$  mohou být sloučeny (kombinovány) do 1 kroku

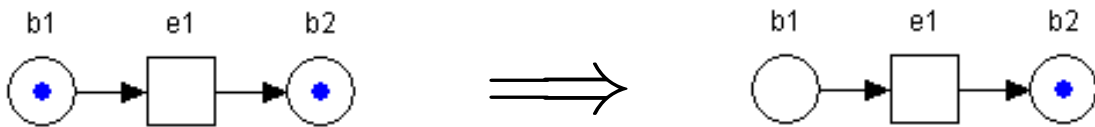
❖ **Poznámka:**

Situace, kdy  $e \subseteq c \wedge e \cap c \neq \emptyset$  pro nějaké  $c$  a  $e$ , se nazývá *kontaktní situací*.

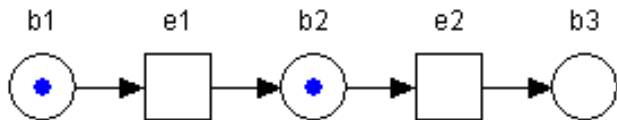
Proč vadí?

1. “proměnná s určitým obsahem je znovu načtena”,  
avšak “začne podzim v případě, že je podzim”
2. nejednoznačnost

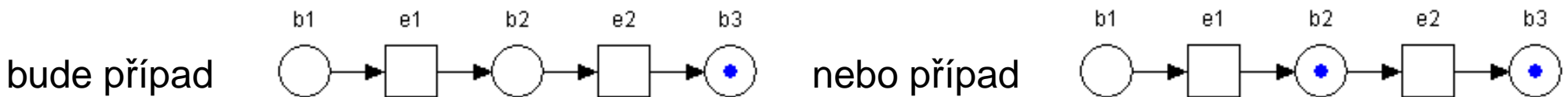
Předpokládejme, že připustíme



Potom v následující situaci, kdy události  $e_1$  a  $e_2$  provedeme právě jednou



bude záviset na pořadí jejich provedení a nevíme, zda výsledkem



❖ **Definice 1.2:** Necht'  $N = (B, E, F)$  je síť.

1. Množina událostí  $G \subseteq E$  se nazývá *nezávislá* (detached), jestliže

$$\forall e_1, e_2 \in G: e_1 \neq e_2 \Rightarrow \bullet e_1 \cap \bullet e_2 = \emptyset = e_1^\bullet \cap e_2^\bullet$$

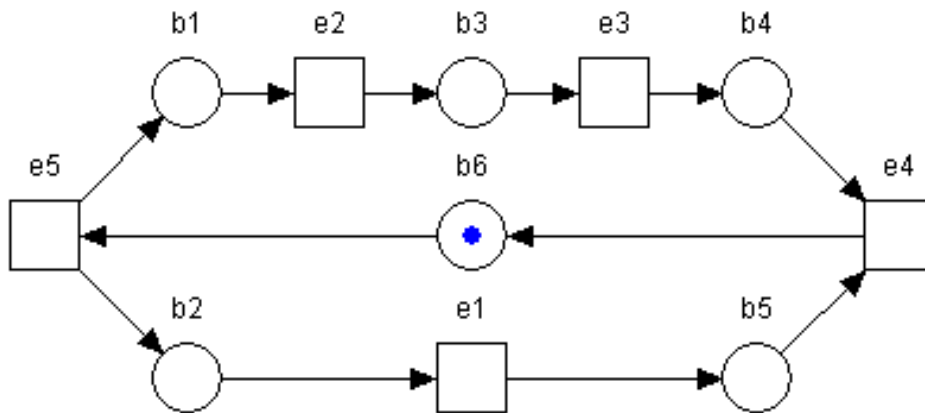
2. Necht'  $c, c'$  jsou případy  $N$  a necht'  $G \subseteq E$  je *nezávislá* množina událostí.  $G$  se nazývá *krokem* (step) z  $c$  do  $c'$  (notace  $c[G]c'$ ), jestliže každá událost  $e \in G$  je  $c$ -proveditelná a

$$c' = (c \setminus \bullet G) \cup G^\bullet$$

❖ **Lemma 1.1:**

$$c[G]c' \Leftrightarrow c \setminus c' = \bullet G \wedge c' \setminus c = G^\bullet$$

#### ❖ Příklad 4:



$\{e_1, e_2\}$  je krok z  $\{b_1, b_2\}$  do  $\{b_3, b_5\}$   
 $\{e_1, e_3\}$  je krok z  $\{b_2, b_3\}$  do  $\{b_4, b_5\}$

**Poznámka:** Krok je důležitým pojmem pro popis procesů generovaných danou sítí (viz dále).

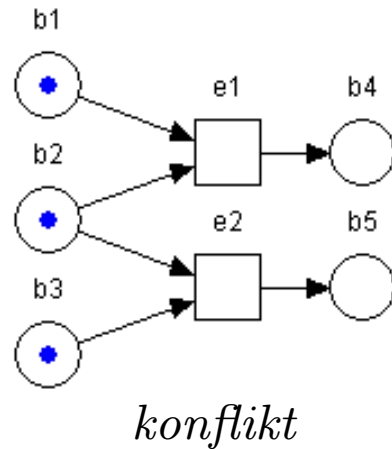
❖ **Lemma 1.2:** Necht'  $N$  je síť,  $c, c'$  případy sítě  $N$  a necht'  $G$  je konečný krok z  $c$  do  $c'$ . Necht'  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  je libovolné uspořádání událostí kroku  $G = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Pak existují případy  $c_0, c_1, \dots, c_n$  takové, že

$$\begin{array}{l} c = c_0, c' = c_n \quad \text{a} \\ c_{i-1} \langle e_i \rangle c_i \quad \text{pro } i = 1, \dots, n \end{array}$$

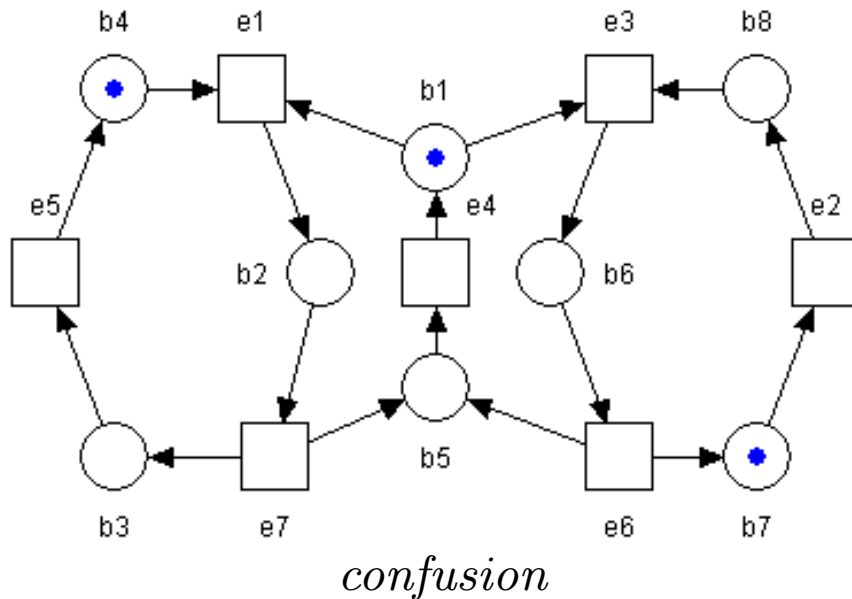
❖ **Důkaz:** Necht'  $e, e' \in G$  a necht'  $c$  je případ, ve kterém jsou proveditelné obě události  $e, e'$ . Pak  $\bullet e \cap \bullet e' = \emptyset \wedge e^\bullet \cap e'^\bullet = \emptyset$ . Takže když  $c \langle e \rangle c'$ , pak  $\bullet e' \subseteq c'$ . Analogicky platí  $e'^\bullet \cap c' = \emptyset$ , a tedy  $e'$  je proveditelná v  $c'$ . Zbytek indukce.



## ❖ Příklad 5: Konflikt a zmatek (confusion)



Konflikt mezi  $e_1$  a  $e_2$  v podmínce  $b_2$ .



Jestli se  $e_1$  objeví před  $e_2$ , pak nebude konflikt mezi  $e_1$  a  $e_3$ . Avšak jestli  $e_2$  bude před  $e_1$ , pak vzniká konflikt v podmínce  $b_1$ .

Protože neexistuje specifikace pořadí  $e_1$  a  $e_2$ , je tato situace označována jako confusion.

## 2. C/E systémy

Omezuje se množina případů  $C$ :

1.  $C$  je “uzavřena”
2.  $C$  je “dostatečně” veliká
  - (a) Každé události přísluší případ
  - (b) Každá podmínka patří alespoň do jednoho případu, avšak ne do každého (to vylučuje smyčky a izolované prvky)
  - (c) Nepovolují se dvě podmínky (události), které mají shodné presety a postsety

❖ **Definice 2.1:** Čtveřice  $\Sigma = (B, E, F, C)$  se nazývá *C/E systém*, jestliže:

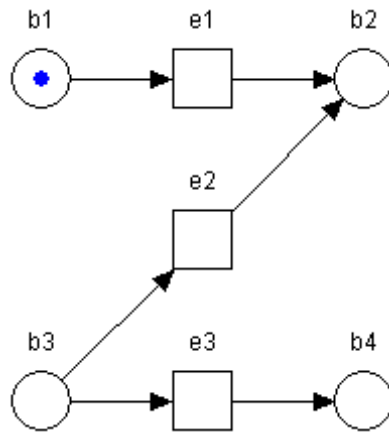
1.  $(B, E, F)$  je jednoduchá síť bez izolovaných prvků,  $B \cup E \neq \emptyset$
2.  $C \subseteq 2^B$  je ekvivalenční třídou vzhledem k *relaci dosažitelnosti*  $R_\Sigma = (r_\Sigma \cup r_\Sigma^{-1})^*$ , kde  $r_\Sigma \subseteq 2^B \times 2^B$  je dána vztahem

$$c_1 r_\Sigma c_2 \stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists G \subseteq E : c_1 [G] c_2$$

$C$  se nazývá *případová třída* (case class) sítě  $\Sigma$ .

3.  $\forall e \in E \exists c \in C$  tak, že  $e$  je  $c$ -proveditelná

❖ **Příklad 6: C/E systém**



případová třída

$$C = \{\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}, \{b_4\}\}$$

❖ **Poznámka:** Případová třída  $C$  libovolného C/E systému je plně určena libovolným prvkem (případem) z  $C$ .

❖ **Tvrzení 2.1:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém.

1.  $B_\Sigma \neq \emptyset \wedge E_\Sigma \neq \emptyset \wedge F_\Sigma \neq \emptyset$
2. Pro  $c \in C_\Sigma$ ,  $c' \subseteq B_\Sigma$  a  $G \subseteq E_\Sigma$   
 $c[G]c' \Rightarrow c' \in C_\Sigma$   
 $c'[G]c \Rightarrow c' \in C_\Sigma$
3.  $\forall b \in B_\Sigma \exists c, c' \in C_\Sigma$  tak, že  $b \in c \wedge b \notin c'$
4.  $\Sigma$  je čistá síť

❖ **Tvrzení 2.2:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém a necht'  $\hat{r} \subseteq 2^{B_\Sigma} \times 2^{B_\Sigma}$  je relace definována vztahem  $c_1 \hat{r} c_2 \stackrel{def.}{\iff} \exists e \in E_\Sigma : c_1[e]c_2$ . Je-li  $E_\Sigma$  konečná množina, pak

$$R_\Sigma = (\hat{r} \cup \hat{r}^{-1})^*$$

❖ **Důkaz:** Pro  $\hat{R} = (\hat{r} \cup \hat{r}^{-1})^*$  platí triviálně  $\hat{R} \subseteq R_\Sigma$ . Protože  $E_\Sigma$  je konečná, každý krok sítě  $\Sigma$  je konečný, a proto z Lemma 1.1 plyne  $r_\Sigma \subseteq \hat{r}^*$  a  $r_\Sigma^{-1} \subseteq (\hat{r}^{-1})^*$ . Z toho pak dostaneme  $R_\Sigma \subseteq \hat{R}$ .

# 3. Cyklické a živé systémy

❖ **Definice 3.1:** C/E systém  $\Sigma$  se nazývá *cyklický*, jestliže

$$\forall c_1, c_2 \in C_\Sigma: c_1 r_\Sigma^* c_2$$

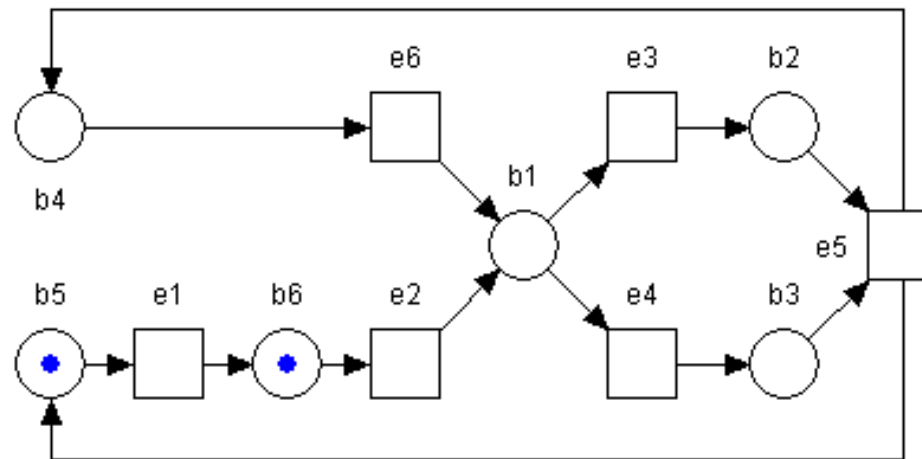
❖ **Tvrzení 3.1:** Necht'  $\Sigma$  je cyklický C/E systém a necht'  $c \in C_\Sigma$ . Pak  $C_\Sigma = \{c' \mid c r_\Sigma^* c'\}$ .

❖ **Definice 3.2:** C/E systém  $\Sigma$  je *živý*, jestliže  $\forall c \in C_\Sigma \ \forall e \in E_\Sigma \ \exists c' \in C_\Sigma$  takový, že  $c r_\Sigma^* c'$  a  $e$  je  $c'$ -proveditelná.

❖ **Tvrzení 3.2:** Každý cyklický C/E systém je živý.

❖ **Důkaz:** Necht'  $c \in C_\Sigma$  a  $e \in E_\Sigma$ . Podle Definice 2.1 existuje  $c' \in C_\Sigma$  takový, že  $e$  je  $c'$ -proveditelná. Podle Definice 3.1 platí  $c r_\Sigma^* c'$ .

❖ **Příklad 7:** C/E systém, který je živý, ale není cyklický



Případ  $\{b_5, b_6\}$  není reprodukovatelný.

# 4. Ekvivalence C/E systémů

❖ **Definice 4.1:** Necht'  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  jsou C/E systémy.

1. Jsou-li dány bijekce  $\gamma: C_\Sigma \rightarrow C_{\Sigma'}$  a  $\epsilon: E_\Sigma \rightarrow E_{\Sigma'}$ , pak systémy  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  nazýváme  **$(\gamma, \epsilon)$ -ekvivalentní**, jestliže pro všechny případy  $c_1, c_2 \in C_\Sigma$  a všechny množiny událostí  $G \subseteq E_\Sigma$  platí:

$$c_1[G]c_2 \Leftrightarrow \gamma(c_1) [\epsilon(G)] \gamma(c_2)$$

2.  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  jsou **izomorfní**, jestliže sítě  $(B_\Sigma, E_\Sigma, F_\Sigma)$  a  $(B_{\Sigma'}, E_{\Sigma'}, F_{\Sigma'})$  jsou izomorfní při bijekci  $\beta$  a jestliže

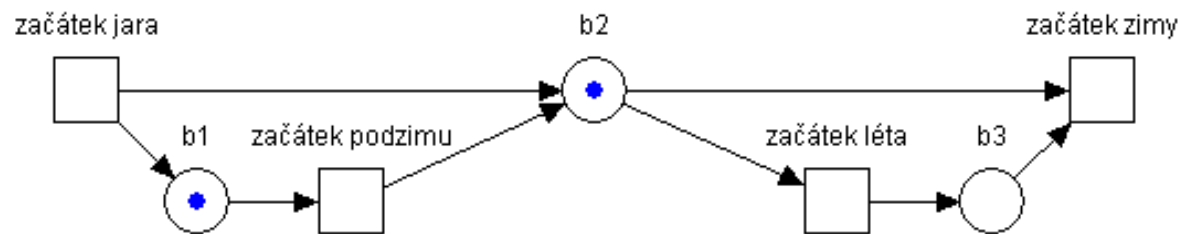
$$c \in C_\Sigma \Leftrightarrow \{\beta(b) \mid b \in c\} \in C_{\Sigma'}$$

❖ **Notace:**  $\Sigma \sim \Sigma'$  jsou-li  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  ekvivalentní

❖ **Tvrzení 4.1:**  $\sim$  je relace ekvivalence

❖ **Tvrzení 4.2:** Ekvivalentní C/E systémy mají vždy stejný počet případů, událostí a kroků. Mohou se lišit v mohutnosti množin podmínek.

❖ **Příklad 8:** C/E systém ekvivalentní se systémem z příkladu 1 a 2



$\{b_1, b_2\}$	$\equiv$	$\{\text{jaro}\}$
$\{b_1, b_3\}$	$\equiv$	$\{\text{léto}\}$
$\{b_2, b_3\}$	$\equiv$	$\{\text{podzim}\}$
$\emptyset$	$\equiv$	$\{\text{zima}\}$



❖ **Tvrzení 4.3:** Necht'  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  jsou ekvivalentní C/E systémy.

1.  $\Sigma$  je cyklický  $\iff \Sigma'$  je cyklický

2.  $\Sigma$  je živý  $\iff \Sigma'$  je živý

❖ **Lemma 4.1:** Necht'  $\Sigma$  a  $\Sigma'$  jsou C/E systémy, pro které platí  $\forall c \in C_\Sigma \cup C_{\Sigma'} : |c| = 1$ .  
 $\Sigma$  a  $\Sigma'$  jsou ekvivalentní, právě když jsou izomorfní.

## 5. Bezkontaktní C/E systémy

❖ **Definice 5.1:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém a necht'  $b, b' \in B_\Sigma$ .

1.  $b'$  se nazývá *komplement*  $b$ , jestliže  $\bullet b = b' \bullet$  a  $b \bullet = \bullet b'$
2.  $\Sigma$  se nazývá *úplný*, jestliže každý prvek  $b \in B_\Sigma$  má komplement  $b' \in B_\Sigma$

❖ **Lemma 5.1:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém a necht'  $b \in B_\Sigma$ .

- $b$  má nejvýše jeden komplement; označme jej  $\hat{b}$

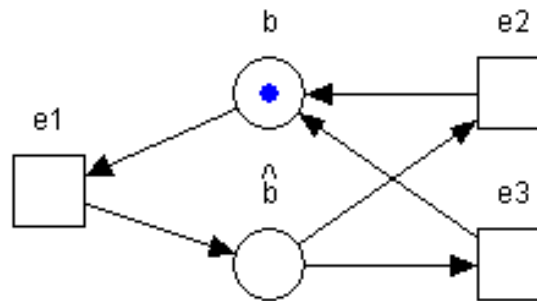
Jestliže  $b$  má komplement  $\hat{b}$ , pak

- $\hat{\hat{b}}$  má komplement a  $\hat{\hat{b}} = b$
- $\forall c \in C_\Sigma: b \in c \vee \hat{b} \in c$

Je-li  $\Sigma$  úplný C/E systém, pak

- $\forall e \in E_\Sigma: |\bullet e| = |e \bullet|$
- $\forall c \in C_\Sigma: |c| = \frac{1}{2}|B_\Sigma|$

❖ **Příklad 9:** Podmínka  $b$  a její komplement  $\hat{b}$



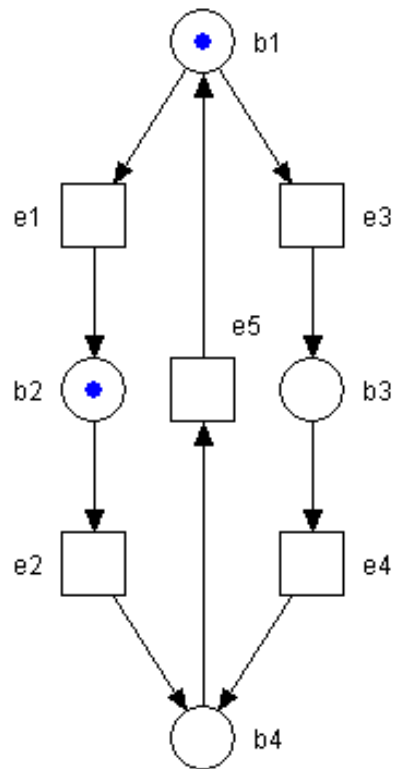
❖ **Definice 5.2:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém a necht'  $B \subseteq B_\Sigma$  je množina podmínek, které nemají komplement v  $B_\Sigma$ . Pro každé  $b \in B$  necht'  $\hat{b}$  označuje nový prvek.

Položme  $F = \{(e, \hat{b}) \mid (b, e) \in F_\Sigma \wedge b \in B\} \cup \{(\hat{b}, e) \mid (e, b) \in F_\Sigma \wedge b \in B\}$ . Pro

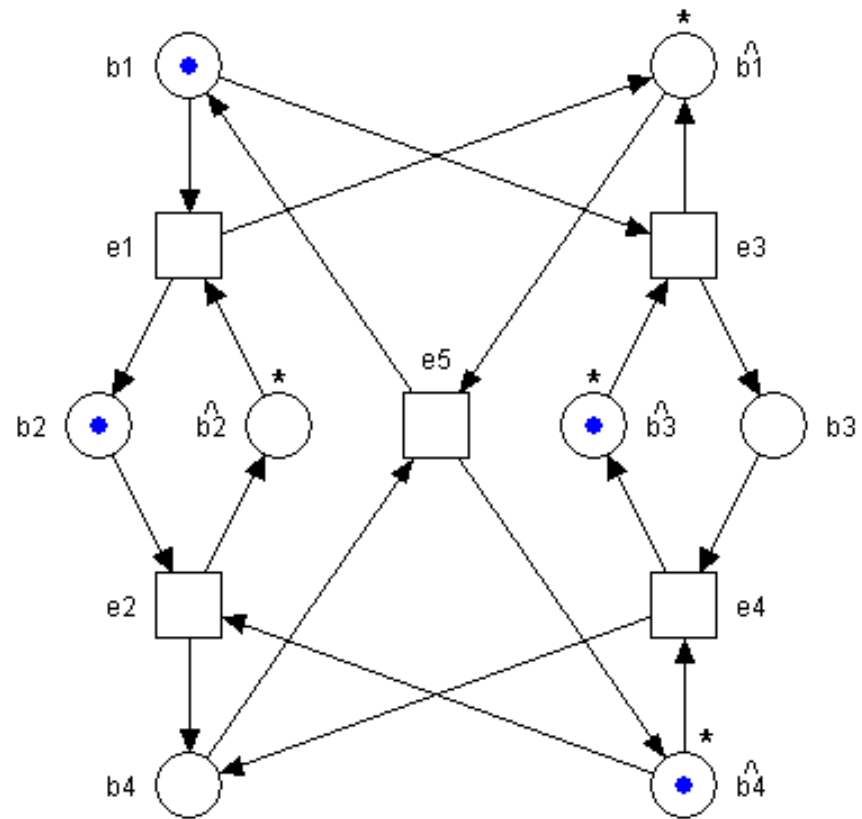
$c \in C_\Sigma$  necht'  $\varphi(c) = c \cup \{\hat{b} \mid b \in B \wedge b \notin c\}$ . Pak C/E systém

$\hat{\Sigma} = (B_\Sigma \cup \{\hat{b} \mid b \in B\}, E_\Sigma, F_\Sigma \cup F, \varphi(C_\Sigma))$  je *komplementací systému*  $\Sigma$ .  $\varphi(c)$  je *komplementací*  $c$ .

❖ **Příklad 10:** C/E systém  $\Sigma$  a jeho komplementace  $\hat{\Sigma}$



$\Sigma$



$\hat{\Sigma}$

\* označuje nové prvky

❖ **Tvrzení 5.1:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém a  $c \in C_\Sigma$ .

1.  $\widehat{\widehat{\Sigma}} = \widehat{\Sigma}$
2.  $\forall b \in B_\Sigma \forall c \in C_\Sigma: b \in \varphi(c) \Leftrightarrow \widehat{b} \notin \varphi(c)$
3.  $c = \varphi(c) \cap B_\Sigma$

**Notace:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém a necht'  $e \in E_\Sigma$ . Označme  $\bar{e}$ , resp.  $e^-$  preset resp. postset události  $e$  v  $\widehat{\Sigma}$  (na rozdíl od  $\bullet e, e^\bullet$  v  $\Sigma$ ).

❖ **Tvrzení 5.2:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém a necht'  $G \subseteq E_\Sigma$  a  $B$  je množina podmínek, které nemají komplement.

1.  $\bar{G} = \bullet G \cup \{\widehat{b} \mid b \in B \wedge b \in G^\bullet\}$   
 $G^- = G^\bullet \cup \{\widehat{b} \mid b \in B \wedge b \in \bullet G\}$
2.  $\bullet G = \bar{G} \cap B_\Sigma, G^\bullet = G^- \cap B_\Sigma$

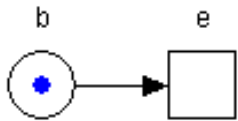
❖ **Theorem 5.1:** Je-li  $\widehat{\Sigma}$  komplementací systému  $\Sigma$ , pak  $\widehat{\Sigma}$  a  $\Sigma$  jsou ekvivalentní.

Důkaz.

❖ **Definice 5.3:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém.  $\Sigma$  se nazývá *bezkontaktní*, jestliže pro každé  $e \in E_\Sigma$  a každé  $c \in C_\Sigma$  platí:

$$\begin{array}{l} (1) \bullet e \subseteq c \Rightarrow e^\bullet \subseteq B_\Sigma \setminus c \\ (2) e^\bullet \subseteq c \Rightarrow \bullet e \subseteq B_\Sigma \setminus c \end{array}$$

**Poznámka:** Podmínka (2) neplyne vždy s (1). Prověř



❖ **Theorem 5.2:**

1. Každý úplný C/E systém je bezkontaktní
2. Pro každý C/E systém existuje ekvivalentní bezkontaktní systém
3. Je-li  $\Sigma$  bezkontaktní, pak  $\forall e \in E_\Sigma: \bullet e \neq \emptyset \wedge e^\bullet \neq \emptyset$

## 6. Případové grafy (Case Graphs)

### ❖ Základní sémantika:

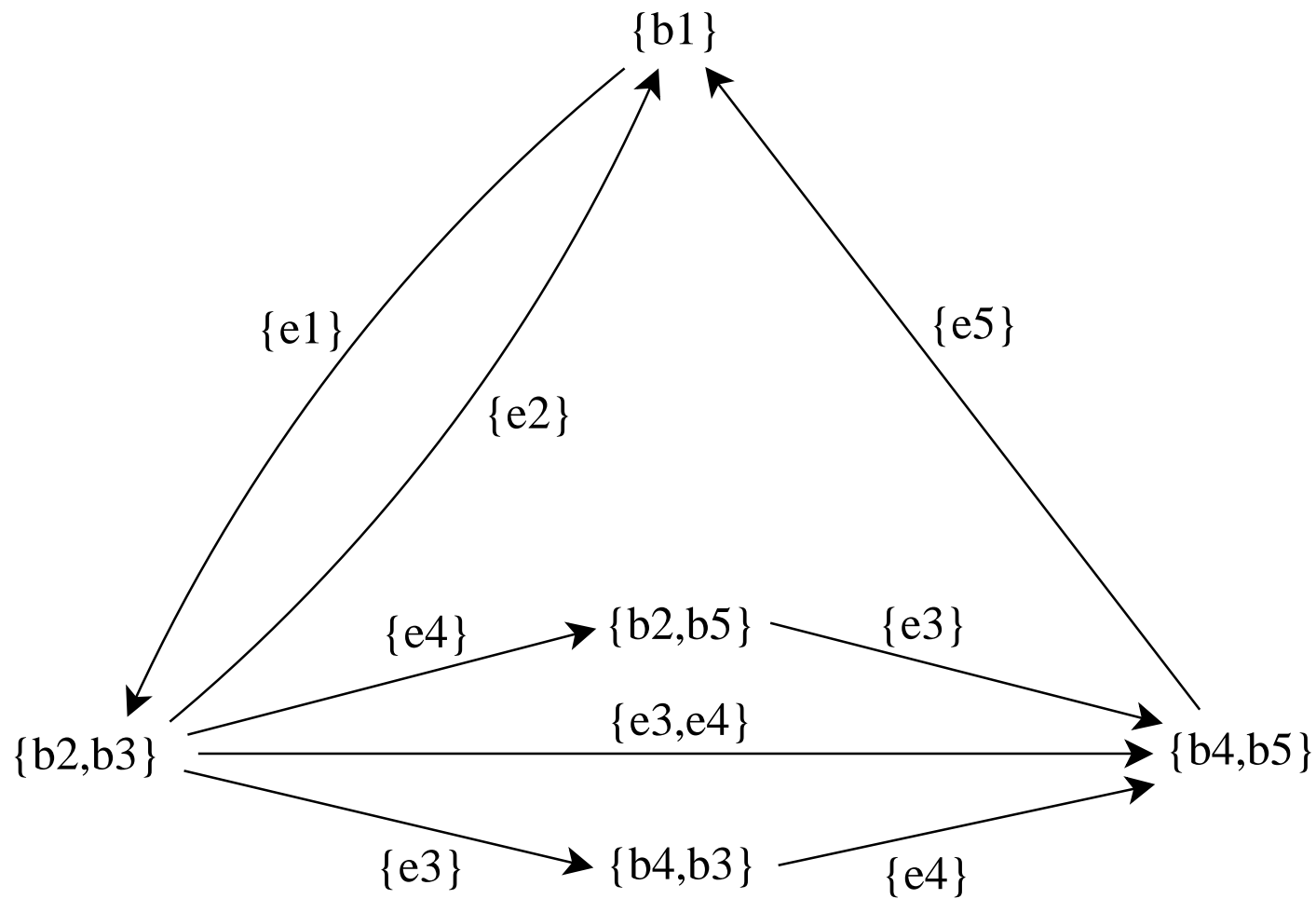
- uzly reprezentují případy
- hrany reprezentují kroky

❖ **Definice 6.1:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém,  $\gamma$  necht' je množina všech kroků systému  $\Sigma$  a necht'  $H$  je množina

$$H = \{(c_1, G, c_2) \in C_\Sigma \times \gamma \times C_\Sigma \mid c_1[G]c_2\}$$

Pak graf  $\Phi_\Sigma = (C_\Sigma, H)$  se nazývá *případový graf* (case graph) C/E systému  $\Sigma$ .

❖ **Příklad 11:** Případový graf odpovídající systému z Příkladu 3





❖ **Theorem 6.1:** C/E systém  $\Sigma$  je cyklický, právě když je jeho případový graf silně souvislý.

❖ **Důkaz:**  $\Sigma$  je cyklický

$$\Leftrightarrow \forall c, c' \in C_\Sigma : (c r_\Sigma^* c')$$

$$\Leftrightarrow \forall c, c' \in C_\Sigma \exists G_1, \dots, G_n \in \gamma \exists c_0, \dots, c_n \in C_\Sigma : c_0 [G_1] c_1 \dots [G_n] c_n \wedge$$

$$c_0 = c \wedge c_n = c'$$

$$\Leftrightarrow \Phi_\Sigma \text{ je silně souvislý}$$

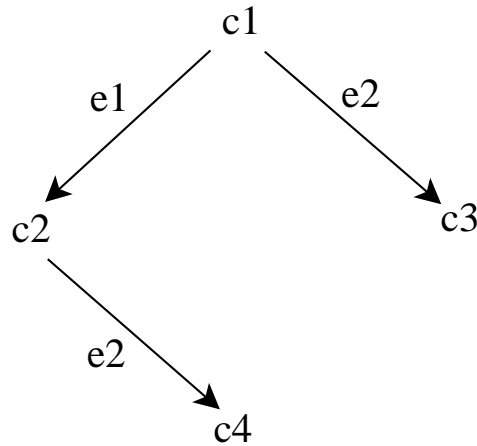
❖ **Theorem 6.2:** C/E systém  $\Sigma$  je živý, když a jen když pro každé  $c_0 \in C_\Sigma$  a pro každé  $e \in E_\Sigma$  existuje cesta v  $\Phi_\Sigma$ :  $c_0 h_1 c_1 \dots c_{n-1} h_n c_n$ , kde  $h_n = \{e\}$ .

❖ **Důkaz:**  $\Sigma$  je živý  $\Leftrightarrow \forall c_0 \in C_\Sigma \forall e \in E_\Sigma \exists c, c' \in C_\Sigma : c_0 r_\Sigma^* c \wedge c[e]c' \Leftrightarrow$   
v  $\Phi$  existuje cesta  $c_0 h_1 \dots c_{n-1} h_n c_n$ , kde  $c_{n-1} = c$ ,  $h_n = \{e\}$  a  $c_n = c'$

❖ **Theorem 6.3:** Dva C/E systémy jsou ekvivalentní, právě když jsou jejich případové grafy izomorfní.

Důkaz.

❖ **Příklad 12:** Ne každý graf je případovým grafem C/E systému



Například graf v příkladu 12 není případovým grafem žádného C/E systému:

- V případě  $c_1$  jsou proveditelné události  $e_1$  a  $e_2$
- Jestliže existuje konflikt mezi  $e_1$  a  $e_2$ , pak  $e_2$  není  $c_2$ -proveditelná a graf nesmí mít hranu  $(c_2, \{e_2\}, c_4)$
- Jestliže tento konflikt neexistuje, pak  $e_1$  je proveditelná také v  $c_3$  a tudíž chybí hrana  $(c_3, \{e_1\}, c_4)$

V “silně” paralelních systémech se případový graf stává velmi složitým. Například krok, který obsahuje  $n$  událostí generuje  $2^n - 1$  hran v případovém grafu.

❖ **Theorem 6.4:** Necht'  $\Sigma$  je C/E systém,  $c_1, c_2, c_3 \in C_\Sigma$  a  $G_1, G_2 \subseteq E_\Sigma$ .

1. Jestli  $c_1 G_1 c_2 G_2 c_3$  je cesta v  $\Phi_\Sigma$ , pak  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$
2. Necht'  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Jestli  $c_1(G_1 \cup G_2)c_3$  je hrana v  $\Phi_\Sigma$ , pak existuje  $c \in C_\Sigma$  tak, že  $c_1 G_1 c G_2 c_3$  je také cesta v  $\Phi_\Sigma$ .

❖ **Důkaz:**

1.  $e \in G_1 \Rightarrow c_2 \cap \bullet e = \emptyset \Rightarrow e$  není  $c_2$ -proveditelná  $\Rightarrow e \notin G_2$
2.  $c_1(G_1 \cup G_2)c_2$  je hrana  $\Phi_\Sigma \Rightarrow c_1[G_1 \cup G_2]c_2 \Rightarrow c_1[G_1]c \wedge c[G_2]c_2$ , kde  $c = (c_1 \setminus \bullet G_1) \cup G_1^\bullet$