Vlastnosti C/E systémů

1. Synchronizační vzdálenosti (synchronic distance)

Důležitou vlastností systému je stupeň závislosti mezi výskyty jeho událostí, tj. jak je výskyt jedné události závislý na předchozím výskytu jiné události(í).

Například:
V příkladu “změn ročních období” (z kapitoly C/E sítě) jsou události “konec zimy” a “začátek jara” silně svázány (silně synchronizovány), říkáme, že koincidují.

Jiné případy závislostí dvou událostí:

- události alternují
- události jsou paralelní (concurrent)
- události se mohou vyskytovat v libovolném pořadí
- události jsou zcela nezávislé

V této kapitole zavedeme míru synchronizace událostí. Budeme uvažovat obecně dvojici množin událostí $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$. Pozorujme, jak často se události množiny E_1 a události množiny E_2 objevují v každém procesu p systému. Absolutní rozdíl počtu jejich vzájemných výskytů nazýváme *variancí* E_1 a E_2 v procesu p. Suprémum variancí ve všech procesech systému se nazývá *synchronizační vzdálenost* $\sigma(E_1, E_2)$ množin E_1 a E_2. Dá se ukázat, že σ má vlastnost *metriky*. Synchronizační vzdálenost je tak prostředkem pro získání kvantitativní informace o dynamickém chování systému, aniž je třeba zavádět pojem "času".

Zavedeme nejprve "míru μ pro počítání událostí". Uvažujme $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$, proces $p : K \to \Sigma$ a počítejme prvky $p^{-1}(E_1)$ a $p^{-1}(E_2)$. Protože nás zajímají největší rozdíly výskytů událostí z E_1 a E_2, spočítáme pro všechny S-řezy D_1, D_2 sítě K prvky $p^{-1}(E_1)$ a $p^{-1}(E_2)$ mezi D_1 a D_2. K tomu účelu, pro všechny $M \subseteq T_K$ položme

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu(M, D_1, D_2) = |M \cap D_1^+ \cap D_2^-| \text{ je-li } D_1 < D_2 \\ \mu(M, D_1, D_2) = |M \cap D_1^- \cap D_2^+| \text{ je-li } D_2 < D_1 \end{array}}$$

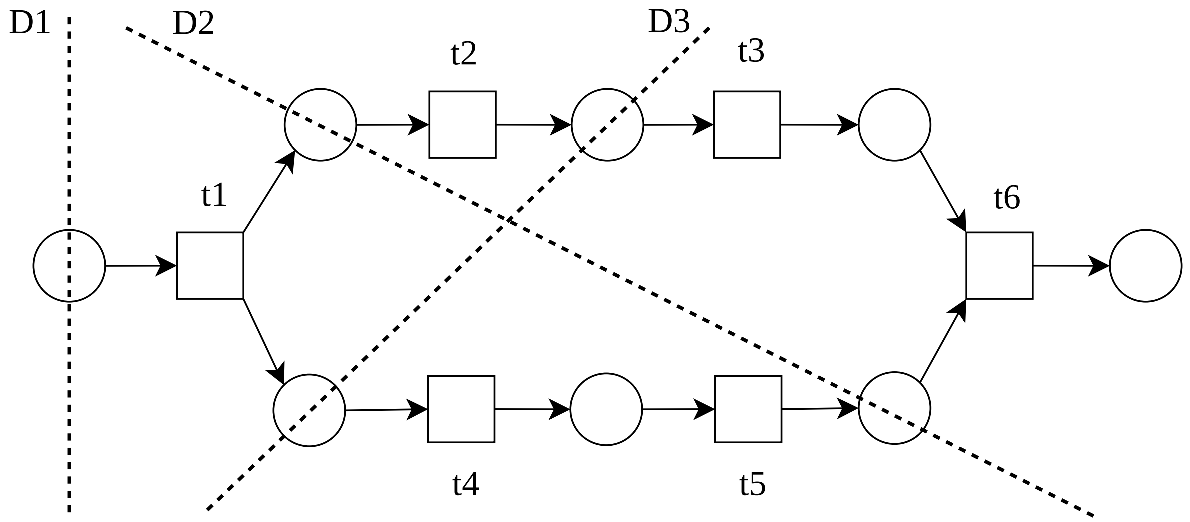
Problém je však v tom, že S-řezy mohou být nesrovnatelné, proto:

❖ **Definice 1.1**: Nechť K je výskytová síť a D_1, D_2 její dva S-řezy. Nechť $M \subseteq T_K$ je konečná množina. Pak nechť

$$\boxed{\mu(M, D_1, D_2) = |M \cap D_1^+ \cap D_2^-| - |M \cap D_1^- \cap D_2^+|}$$

Pro takto zavedené μ platí: $\mu(M, D_1, D_2) = -\mu(M, D_2, D_1)$

❖ **Příklad 1**: Míra μ pro počítání událostí



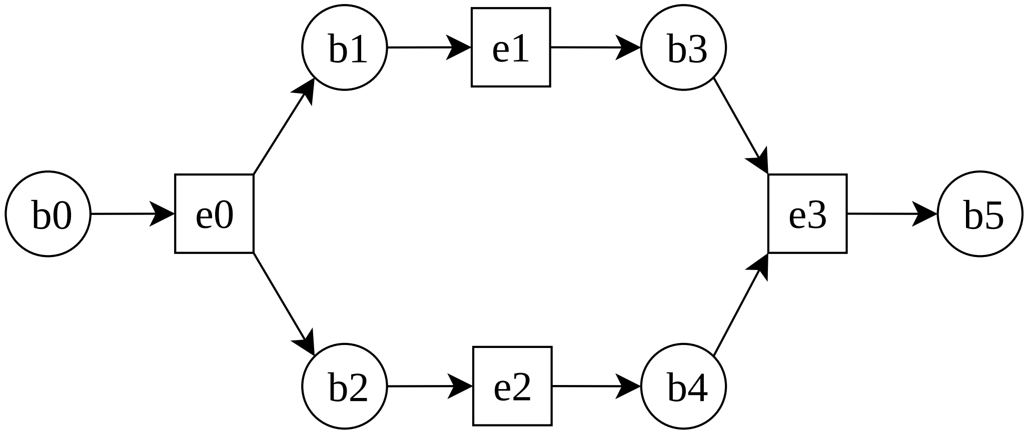
$$\mu(\{t_1\}, D_1, D_2) = 1$$
$$\mu(\{t_4, t_5\}, D_2, D_3) = -2$$
$$\mu(\{t_2, t_3\}, D_2, D_3) = 1$$
$$\mu(\{t_2, t_3\}, D_3, D_2) = -1$$
$$\mu(\{t_2, t_4\}, D_3, D_2) = 0$$

❖ **Definice 1.2**: Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém. Označme π_Σ množinu všech jeho procesů. Dále nechť $p : K \to \Sigma \in \pi_\Sigma$ a $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$. Pak

$$\boxed{\nu(p, E_1, E_2) = \max\{\ \mu(p^{-1}(E_1), D_1, D_2) - \mu(p^{-1}(E_2), D_1, D_2) \mid\ D_1, D_2 \in \underline{sl}(K)\ \}}$$

se nazývá *variancí množin událostí E_1 a E_2 v procesu p*.

❖ **Příklad 2**: Variance množin událostí ν



$$\nu(p, \{e_0\}, \{e_3\}) = 1$$
$$\nu(p, \{e_0\}, \{e_1, e_2\}) = 2$$
$$\nu(p, \{e_0, e_1\}, \{e_2\}) = 2$$
$$\nu(p, \{e_1\}, \{e_2\}) = 2$$

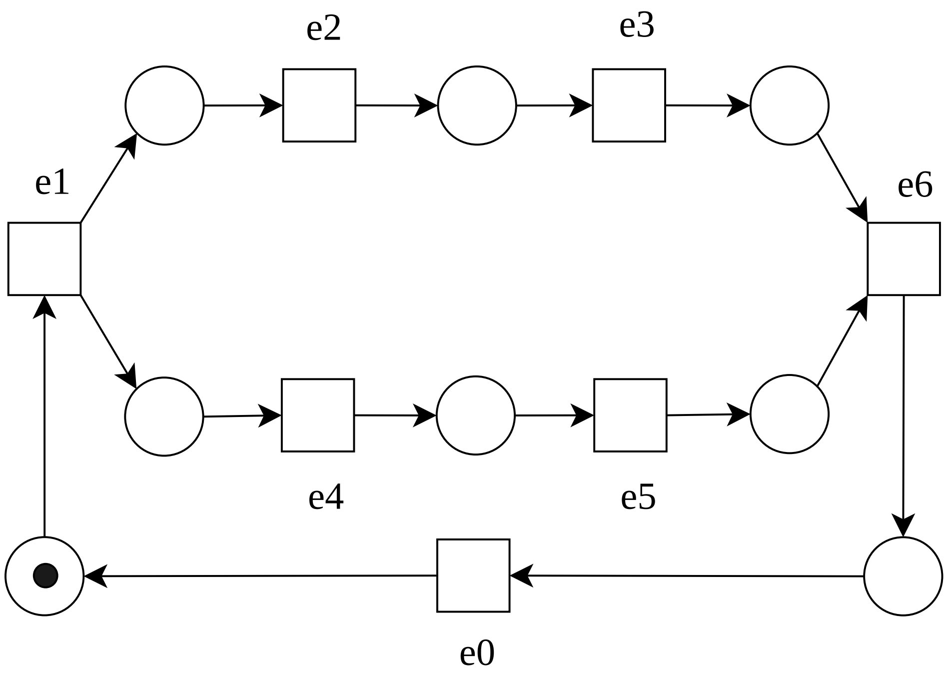
❖ **Tvrzení 1.1**: $\forall p \in \pi_\Sigma \;\; \forall E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma : \; \nu(p, E_1, E_2) = \nu(p, E_2, E_1)$

❖ **Definice 1.3**: Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém a nechť $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$.

$$\boxed{\sigma(E_1, E_2) = \sup\{\; \nu(p, E_1, E_2) \mid \; p \in \pi_\Sigma \;\}}$$

se nazývá *synchronizační vzdálenost množin událostí E_1 a E_2*.

❖ **Příklad 3**: Synchronizační vzdálenost σ



$$\sigma(\{e_4\}, \{e_0\}) = 1$$
$$\sigma(\{e_2\}, \{e_4\}) = 2$$
$$\sigma(\{e_2, e_3\}, \{e_4, e_5\}) = 4$$
$$\sigma(\{e_2, e_4\}, \{e_3, e_5\}) = 2$$
$$\sigma(\{e_4, e_5\}, \{e_3\}) = \omega$$

1.1 Grafická reprezentace synchronizační vzdálenosti

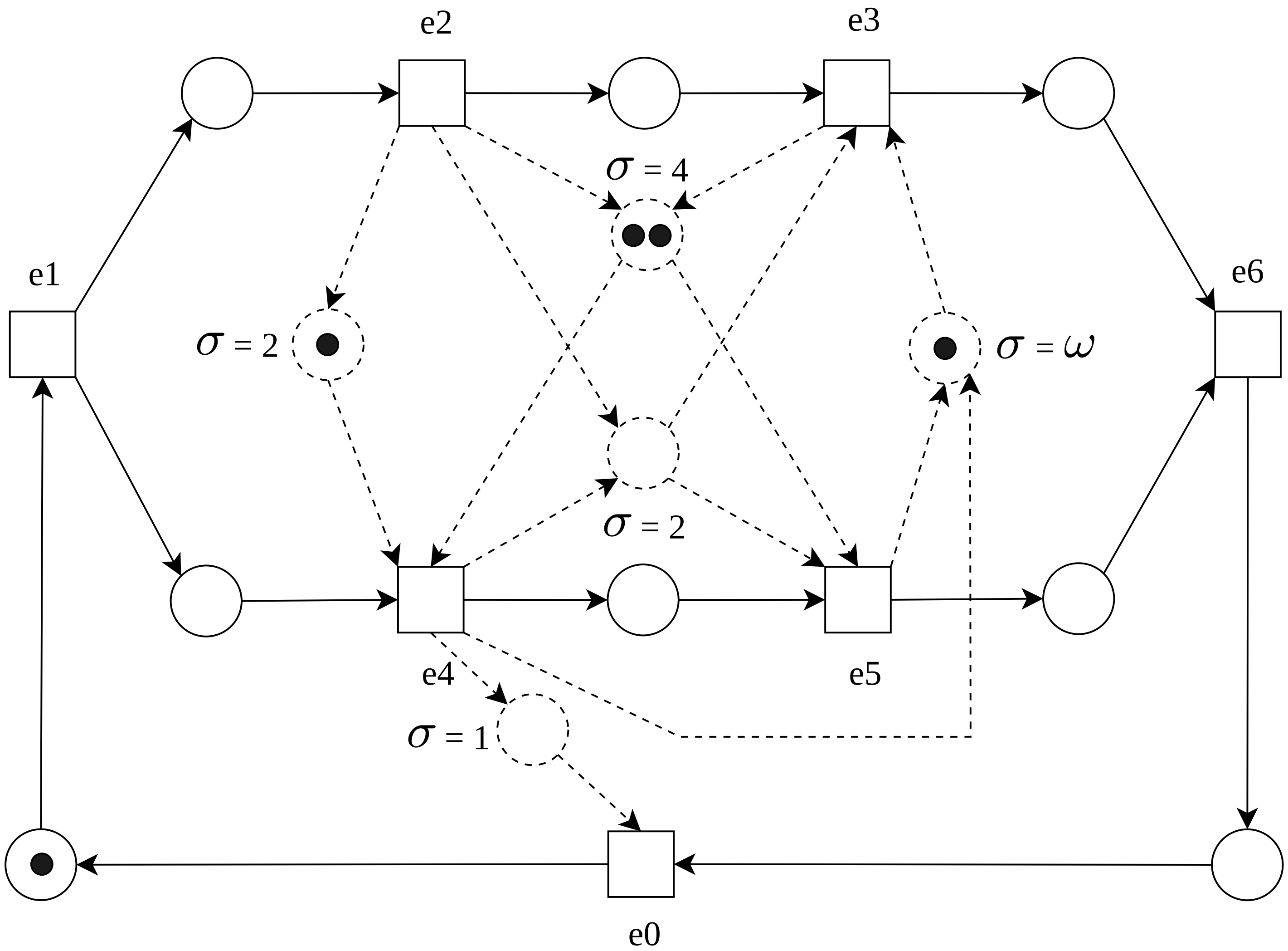
Pro reprezentaci synchronizační vzdálenosti množin událostí E_1 a E_2 zavedeme nové místo s: ${}^\bullet s = E_1$ a $s^\bullet = E_2$. V každém případu c systému Σ obsahuje s určitý počet značek (dostatečně mnoho, aby nebránilo provedení událostí). Kdykoliv se provede událost z E_1, resp. E_2, počet značek se zvětší, resp. zmenší o 1. Pak $\sigma(E_1, E_2)$ je supremum přes největší změny počtu značek v místě s při provádění sítě.

Graficky jsou s a nové hrany sítě kresleny čárkovaně. Místo s má označení "$\sigma = x$", jestliže $\sigma({}^\bullet s, s^\bullet) = \sigma(E_1, E_2) = x$.

Příklad grafické reprezentace synchronizační vzdálenosti množin událostí C/E systému z příkladu 3 je znázorněn v příkladu 4.

Poznámka:
Grafickou reprezentací synchronizační vzdálenosti v C/E síti získáme P/T síť, ve které nové místo s má neomezenou kapacitu značenou symbolem ω ($\omega = \inf(\mathbb{N})$).

❖ **Příklad 4**: Grafická reprezentace synchronizační vzdálenosti z příkladu 3

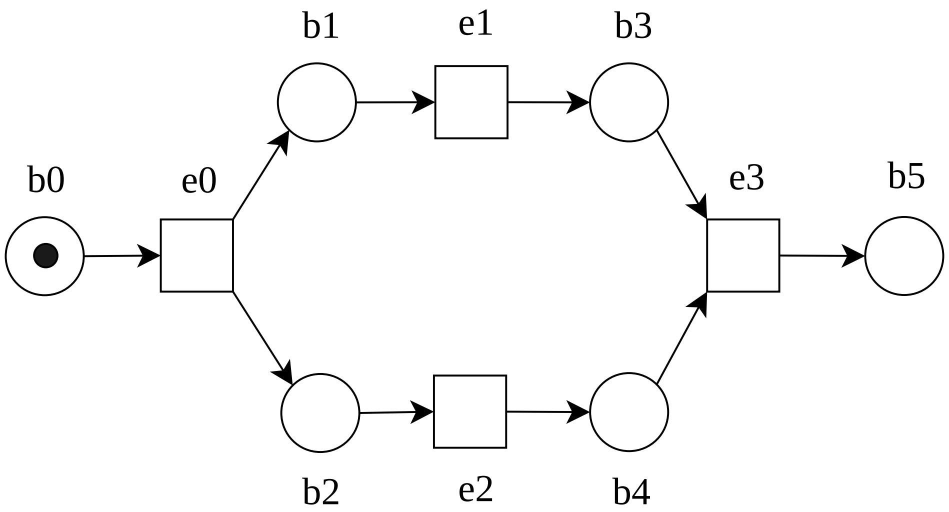


1.2 Některé speciální synchronizační vzdálenosti

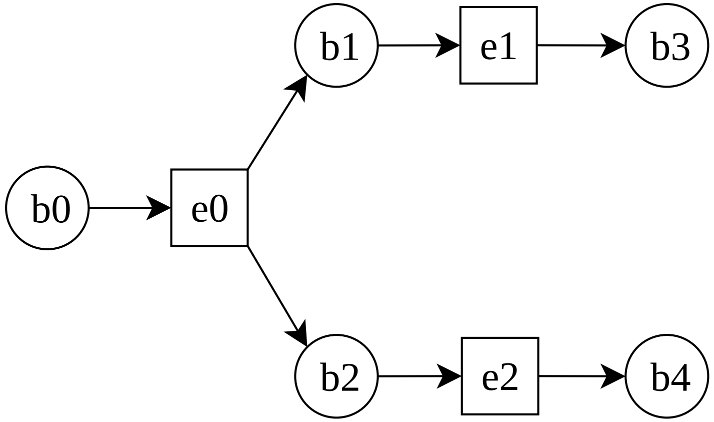
Zřejmě, je-li $E_1 = E_2$, pak $\sigma(E_1, E_2) = 0$ a naopak, je-li $\sigma(E_1, E_2) = 0$, pak $E_1 = E_2$.
Speciálně $e_1 = e_2 \;\Leftrightarrow\; \sigma(e_1, e_2) = 0$, události e_1 a e_2 koincidují.

Uvažujme nyní dva C/E systémy v příkladech 5 a 6. Události e_1 a e_2 jsou v Σ paralelní - nezávislé. Podle definice je $\sigma_\Sigma(e_1, e_2) = 2$.

❖ **Příklad 5**: C/E systém, ve kterém se dvě události e_1 a e_2 vyskytují paralelně ($\sigma(e_1, e_2) = 2$)



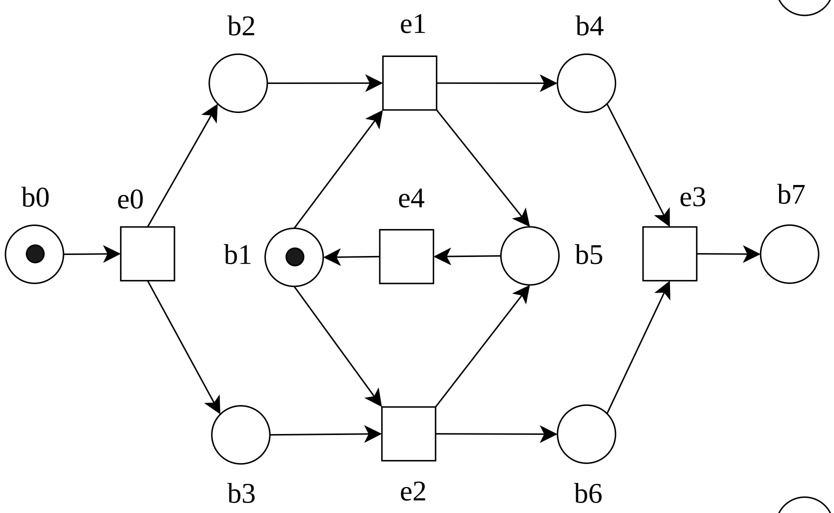
$C/E\ systém\ \Sigma$



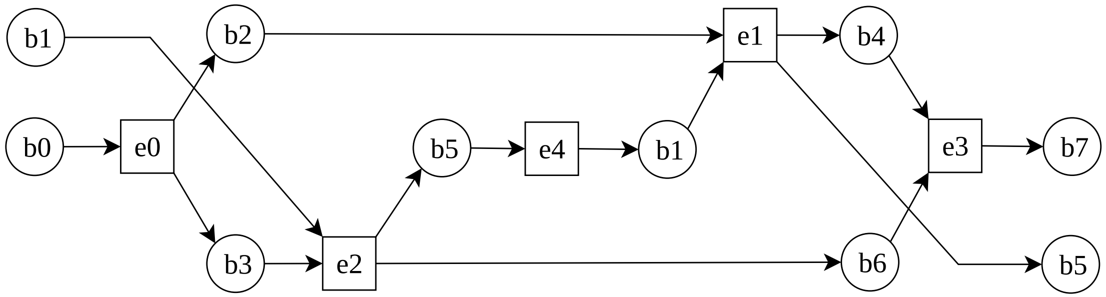
$proces\ p\ systému\ \Sigma$

V příkladu 6 je zaveden “řídící mechanizmus”, který neumožňuje, aby e_1 a e_2 byly paralelní; mohou však proběhnout v libovolném pořadí. $p_i^{-1}(e1)$ a $p_i^{-1}(e2)$, $i = 1, 2$ leží v jednom řetězci v procesech p_1, p_2 systému Σ', kdežto v Σ jsou v relaci <u>co</u>. Koncepční rozdíl mezi Σ a Σ' je vyjádřen právě synchronizační vzdáleností e_1 a e_2. V příkladě 6 je $\sigma(e_1, e_2) = 1$.

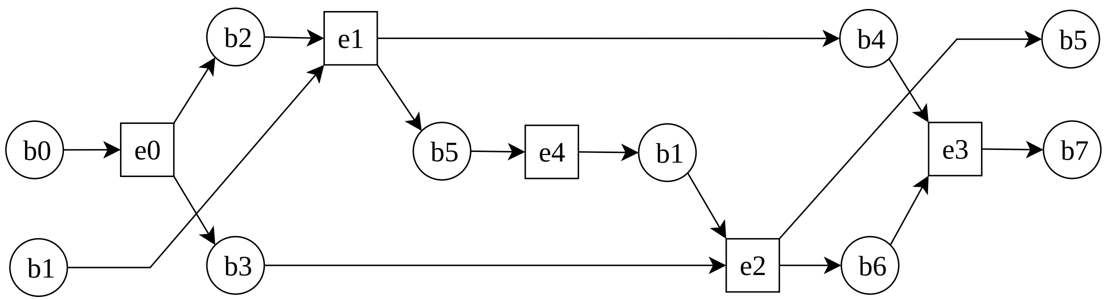
❖ **Příklad 6**: C/E systém, ve kterém se dvě události e_1 a e_2 vyskytují v libovolném pořadí $(\sigma(e_1, e_2) = 1)$



$C/E\ syst\acute{e}m\ \Sigma'$



$proces\ p_1\ \ syst\acute{e}mu\ \Sigma'$

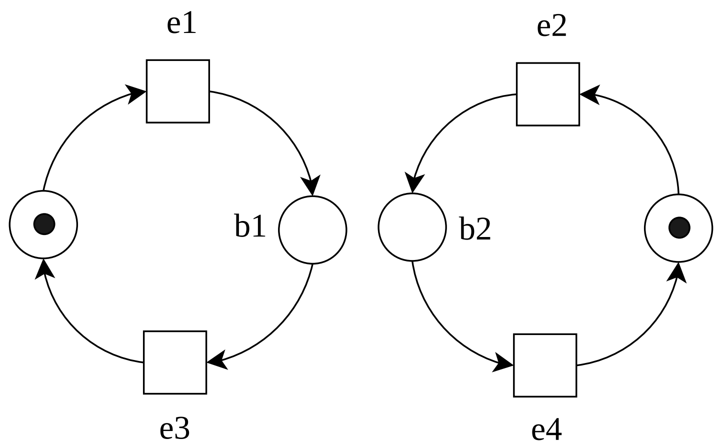


$proces\ p_2\ \ syst\acute{e}mu\ \Sigma'$

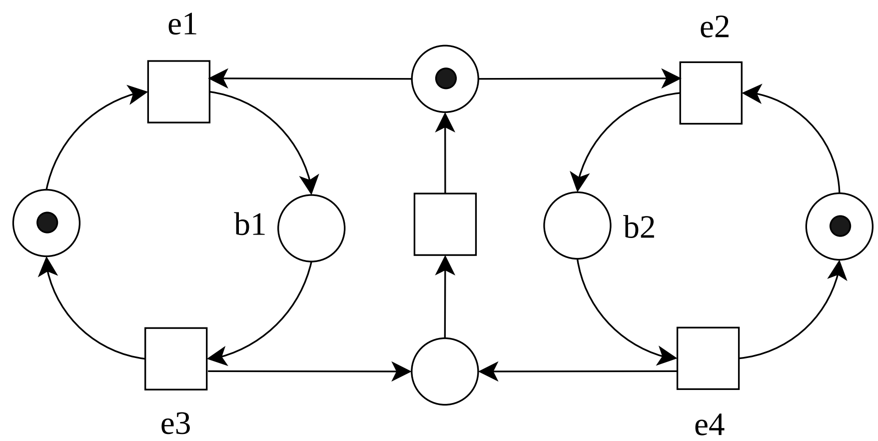
V příkladě 7 mají odpovídající dvojice událostí systému Σ_1 a Σ_2 stejnou synchronizační vzdálenost: $\sigma(e_1, e_2) = \sigma(e_1, e_4) = \omega$, $\sigma(e_1, e_3) = \sigma(e_2, e_4) = 1$ v obou systémech.

Intuitivně však cítíme, že Σ_2 je více synchronizován. To je vyjádřitelné synchronizační vzdáleností množin $\{e_1, e_2\}$ a $\{e_3, e_4\}$: $\sigma(\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}) = 2$ v Σ_1, ale $\sigma(\{e_1, e_3\}, \{e_3, e_4\}) = 1$ v Σ_2, viz. Příklad 8.

❖ **Příklad 7**:



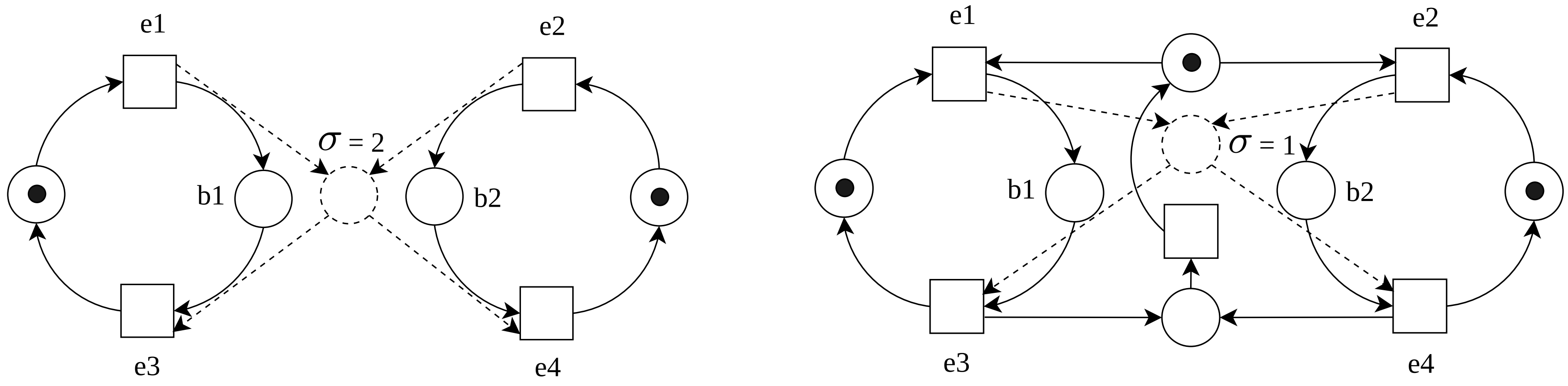
C/E *systém* Σ_1



C/E *systém* Σ_2

$$\sigma_{\Sigma_1}(e, e') = \sigma_{\Sigma_2}(e, e') \text{ pro } e, e' \in \{e_1, \ldots, e_4\}$$

❖ **Příklad 8**: Synchronizační vzdálenosti v systémech Σ_1, Σ_2

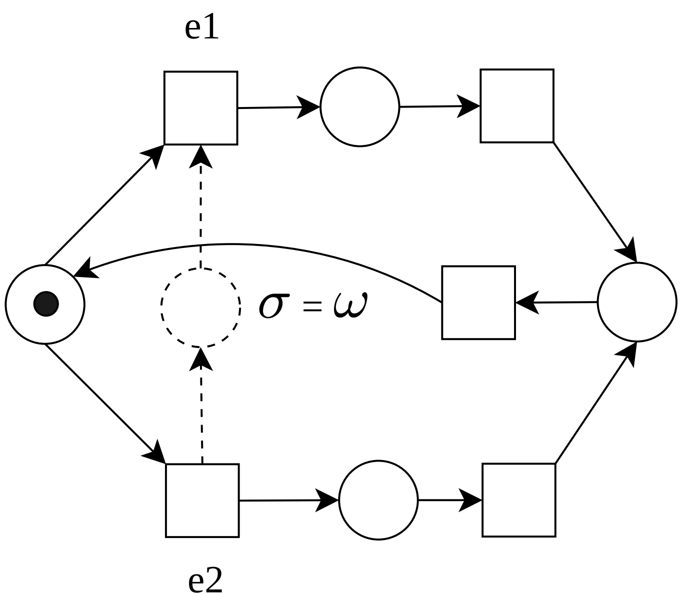


$C/E\ systém\ \Sigma_1$ $C/E\ systém\ \Sigma_2$

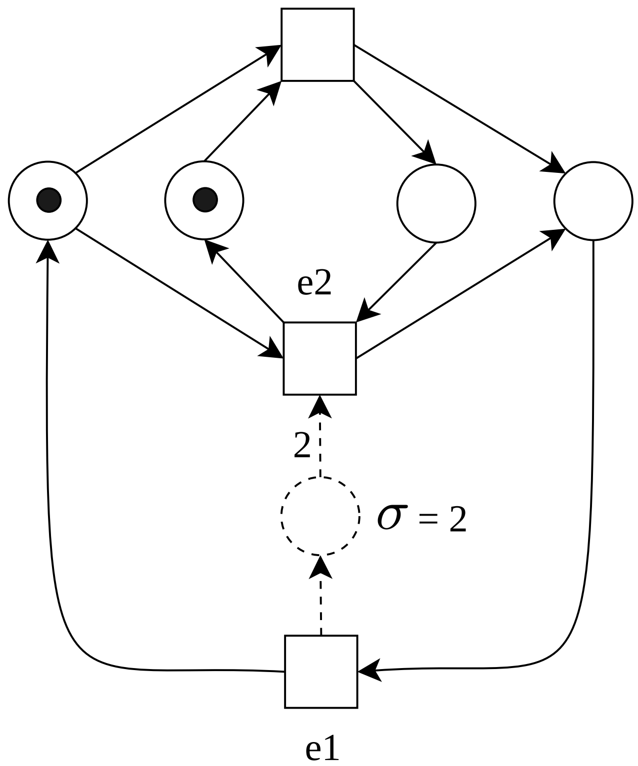
V C/E systému Σ_1 v příkladu 9 jsou události e_1 a e_2 neomezeně často v konfliktu; jejich synchronizační vzdálenost je nekonečná: $\sigma(e_1, e_2) = \omega$.

V C/E systému Σ_2 je také $\sigma(e_1, e_2) = \omega$. Na rozdíl od Σ_1 jsou však výskyty e_1 a e_2 závislé na sobě; e_1 se provádí $2\times$ častěji než e_2. K vyjádření tohoto rozdílu je třeba zobecnění synchronizační vzdálenosti na tzv. *váženou synchronizační vzdálenost* (v grafické reprezentaci mají přidané hrany celočíselnou váhu).

❖ **Příklad 9**:



$C/E\ systém\ \Sigma_1$



$C/E\ systém\ \Sigma_2$

2. Některé kvantitativní vlastnosti synchronzační vzdálenosti

❖ **Theorem 2.1**: Nechť Σ bezkontaktní C/E systém a nechť $E_1, E_2, E_3 \subseteq E_\Sigma$. Pak

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(1) } \sigma(E_1, E_2) = 0 \Leftrightarrow E_1 = E_2 \\ \text{(2) } \sigma(E_1, E_2) = \sigma(E_2, E_1) \\ \text{(3) } \sigma(E_1, E_2) \leq \sigma(E_1, E_3) + \sigma(E_3, E_2) \end{array}}$$

Poznámka: Synchronizační vzdálenost je tedy metrikou na množinách událostí.

❖ **Theorem 2.2**: Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém a nechť $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$. Pak

$$\boxed{\sigma(E_1, E_2) = \sigma(E_1 \setminus E_2, E_2 \setminus E_1)}$$

3. Synchronizační vzdálenosti v sekvenčních systémech

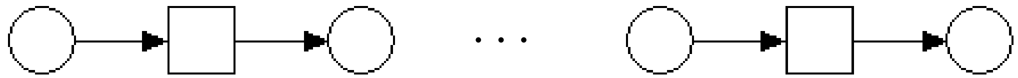
❖ **Definice 3.1**: C/E systém Σ se nazývá *stavový stroj* (state machine), jestliže

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(1) } \forall e \in E_\Sigma : \ |{}^\bullet e| = |e^\bullet| = 1 \\ \text{(2) } \forall c \in C_\Sigma : \ |c| = 1\end{array}}$$

❖ **Theorem 3.1**: Nechť Σ je stavový stroj a nechť $e_1, e_2 \in E_\Sigma$. Pak

$$\boxed{\sigma(e_1, e_2) \in \{0, 1, \omega\}}$$

Důkaz: Každý proces systému Σ je tvořen řetězcem tvaru



Předpokládejme, že existuje proces $p : K \to \Sigma$ se dvěma přechody $t_1, t_2 \in T_K$ takovými, že pro $i = 1, 2$, $p(t_1) = p(t_2) = e_i$ a $\forall t \in t_1^+ \cap t_2^- : p(t) \neq e_i$

Pak pro $p_1 = p \mid ({}^\bullet t_1^+ \cap {}^\bullet t_2^-)$ je $p_n = \overbrace{p_1 \circ \ldots \circ p_1}^{\texttt{n-krát}}$ také proces a $\nu(p_n, \{e_1\}, \{e_2\}) \geq n$.
Tedy $\sigma(e_1, e_2) = \omega$. Jinak je pro všechny procesy $p : \nu(p, e_1, e_2) \leq 1$ a tedy $\sigma(e_1, e_2) \leq 1$.

4. Synchronizační vzdálenosti v cyklických systémech

❖ **Definice 4.1**: Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém, $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$ a nechť $p \in \pi_\Sigma$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \nu'(p, E_1, E_2) = |\, |p^{-1}(E_1)| - |p^{-1}(E_2)|\, | \\ \sigma'(E_1, E_2) = \sup\{\, \nu'(p, E_1, E_2) \mid p \in \pi_\Sigma) \,\} \end{array}}$$

❖ **Tvrzení 4.1**: Pro libovolný C/E systém Σ a $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$ platí:

$$\boxed{\sigma'(E_1, E_2) \leq \sigma(E_1, E_2)}$$

Například v příkladu 5 je $\sigma'(\{e_1\}, \{e_2\}) = 1 \quad < \quad \sigma(\{e_1\}, \{e_2\}) = 2$.

❖ **Theorem 4.1**: Nechť Σ je bezkontaktní a cyklický systém.
Pak pro všechny $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$ je

$$\boxed{\sigma'(E_1, E_2) = \sigma(E_1, E_2)}$$

Důkaz

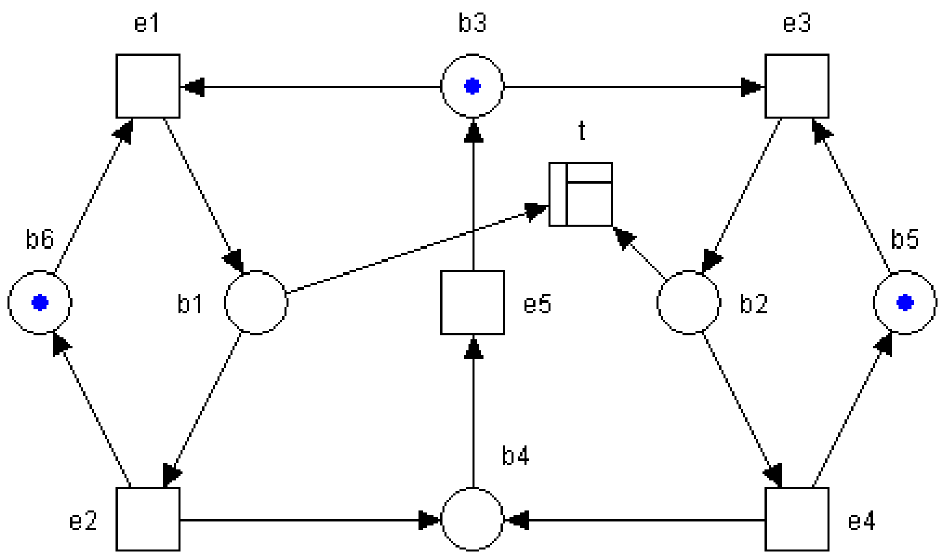
5. Fakta (facts)

S využitím podmínek C/E systému je možno konstruovat formule výrokové logiky (Co je výroková logika?). Tyto formule budou pravdivé, či nepravdivé v závislosti na tom, ve kterém případu se systém nachází. Zvláštní zájem zaslouží “tautologie” (kontradikce), které popisují invariantní vlastnosti systému. Ukážeme, jak lze reprezentaci a vyhodnocení těchto formulí začlenit do “síťového kalkulu”.

Uvažujme C/E systém Σ_1 z příkladu 7. Přidejme navíc požadavek, aby podmínky b_1 a b_2 nikdy neplatily současně. Toho lze dosáhnout konstrukcí systému Σ_2 v témže příkladě. Tato nová vlastnost systému může být vyjádřena zavedením nového přechodu t takového, že

$$^{\bullet}t = \{b_1, b_2\}, \quad t^{\bullet} = \emptyset$$

který není proveditelný v žádném případu systému Σ_2.



Nejprve budeme studovat vztahy mezi formulemi obsahujícími podmínky (například $\neg(b_1 \wedge b_2)$) a prováděním událostí. K tomu účelu uvažujme b jako prvotní (atomickou) formuli, která je pravdivá v daném případu c, právě když b patří do c. Pak můžeme konstruovat formule výrokové logiky a vyhodnocovat jejich pravdivostní hodnoty.

❖ **Definice 5.1**: Nechť Σ je C/E systém.

1. Množina A_Σ *formulí* (výrokové logiky) nad B_Σ je nejmenší množina, pro kterou
   (a) $B_\Sigma \subseteq A_\Sigma$
   (b) $a_1, a_2 \in A_\Sigma \Rightarrow (a_1 \wedge a_2) \in A_\Sigma, (a_1 \vee a_2) \in A_\Sigma, (a_1 \rightarrow a_2) \in A_\Sigma, (\neg a_1) \in A_\Sigma$
2. V každém $c \in C_\Sigma$ přísluší každé formuli $a \in A_\Sigma$ hodnota $\hat{c}(a)$ definovaná valuací $\hat{c} : A_\Sigma \rightarrow \{0, 1\}$:
   - $b \longmapsto 1$, jestliže $b \in c$
   - $b \longmapsto 0$, jestliže $b \notin c$
   - $(a_1 \wedge a_2) \longmapsto \min(\hat{c}(a_1), \hat{c}(a_2))$
   - $(a_1 \vee a_2) \longmapsto \max(\hat{c}(a_1), \hat{c}(a_2))$
   - $(a_1 \rightarrow a_2) \longmapsto \hat{c}((\neg a_1) \vee a_2)$
   - $(\neg a_1) \longmapsto 1 - \hat{c}(a_1)$
3. Dvě formule $a_1, a_2 \in A_\Sigma$ jsou *ekvivalentní* v Σ, jestliže pro všechny $c \in C_\Sigma : \ \hat{c}(a_1) = \hat{c}(a_2)$

Nyní ke každé události $e \in E_\Sigma$ přiřadíme formuli $a(e)$ tak, že pro všechny případy c platí: $a(e)$ platí, právě když e není c-proveditelná.

❖ **Definice 5.2**: Nechť Σ je konečný C/E systém a nechť $a \in E_\Sigma$. Nechť ${}^\bullet e = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\},\ e^\bullet = \{b'_1, b'_2, \ldots, b'_m\}$. Pak

$$\boxed{a(e) :\ (b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n) \rightarrow (b'_1 \vee b'_2 \vee \ldots \vee b'_m)}$$

Je-li ${}^\bullet e = \emptyset$, pak $a(e) :\ (b'_1 \vee \ldots \vee b'_m)$, je-li $e^\bullet = \emptyset$, pak $a(e) :\ \neg(b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n)$.

❖ **Lemma 5.1**: Nechť Σ je konečný C/E systém a nechť $e \in E_\Sigma$. Pak pro každé $c \in C_\Sigma$, $a(e)$ platí v c, právě když e není c-proveditelná.

Důkaz: $\hat{c}(a(e)) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in {}^\bullet e$, kde $\hat{c}(b) = 0$ nebo $\exists b' \in e^\bullet : c(b') = 1 \Leftrightarrow \exists b \in {}^\bullet e$ a $b \notin c$ nebo $\exists b' \in e^\bullet$ a $b' \in c \Leftrightarrow e$ není c-proveditelná.

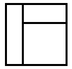
Ukázali jsme, jak spojovat formule s událostmi systému. Teď uvažujme, jak reprezentovat libovolnou pravdivostní formuli sestavenou z podmínek systému.

K tomu účelu obohatíme C/E systém o nové přechody, které nejsou proveditelné v žádném případu systému ("dead" přechody). Proto neovlivní chování systému. S každým novým přechodem spojíme formuli $a(t)$, stejně jako pro události. $a(t)$ pak platí v systému Σ (platí pro každý jeho případ). Takto je možné reprezentovat všechny platné formule pro Σ určitým počtem "mrtvých" přechodů. Tyto přechody nazýváme fakta.

❖ **Definice 5.3**: Nechť Σ je C/E systém.

1. Formule $a \in A_\Sigma$ se nazývá *platnou* v Σ, jestliže $\forall c \in C_\Sigma : \hat{c}(a) = 1$
2. Pro $B_1, B_2 \subseteq B_\Sigma$ nechť $t = (B_1, B_2)$ je nový přechod: ${}^\bullet t = B_1$ a $t^\bullet = B_2$. Přechod t se nazývá *faktem* systému Σ, jestliže t není proveditelný pro žádné $c \in C_\Sigma$.

V grafické reprezentaci je fakt t označen přechodem

 F - $False$

Pro t je $a(t)$ definována jako pro e: například jestliže ${}^{\bullet}t = \{b_1, \ldots, b_n\},\ t^{\bullet} = \{b'_1, \ldots, b'm\}$, pak $a(t) = (b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n) \rightarrow (b'_1 \vee b'_2 \vee \ldots \vee b'_m)$

❖ **Theorem 5.2**: Nechť Σ je konečný C/E systém a nechť $a \in A_\Sigma$. Formule a je platná v Σ, právě když existují fakta $t_1, t_2, \ldots, t_k$ taková, že a je logicky ekvivalentní formuli $a(t_1) \wedge a(t_2) \wedge \ldots \wedge a(t_n)$

Důkaz: (s využitím KNF)

Problém: Jak reprezentovat formule, které platí jen pro některé případy systému. Pro $c \in C_\Sigma$ nechť c' označuje konjunkci všech podmínek tvořících c. Pak a platící pro případy $c_1, \ldots, c_k$ lze popsat formulí $(c'_1 \wedge c'_2 \wedge \ldots \wedge c'_k) \rightarrow a$.

❖ **Příklad 10**: Rozšíření systému z příkladu 2 (kapitola C/E sítě) o dvě fakta t_1 a t_2