

Jazyky Petriho sítí

1. Základní pojmy

Formálně lze pojem jazyka Petriho sítě zavést s využitím zobecněné přechodové funkce Petriho sítě:

❖ **Definice 1:** Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť a $[M_0]$ její množina dosažitelných značení. *Přechodovou funkcí* Petriho sítě N nazveme funkci δ :

$$\delta: [M_0] \times T \rightarrow [M_0], \text{ pro kterou}$$
$$\forall t \in T: \forall M, M' \in [M_0]: \delta(M, t) = M' \stackrel{def.}{\iff} M[t]M'$$

Přechodová funkce δ může být zobecněna na posloupnosti přechodů:

$$\delta: [M_0] \times T^* \rightarrow [M_0]$$

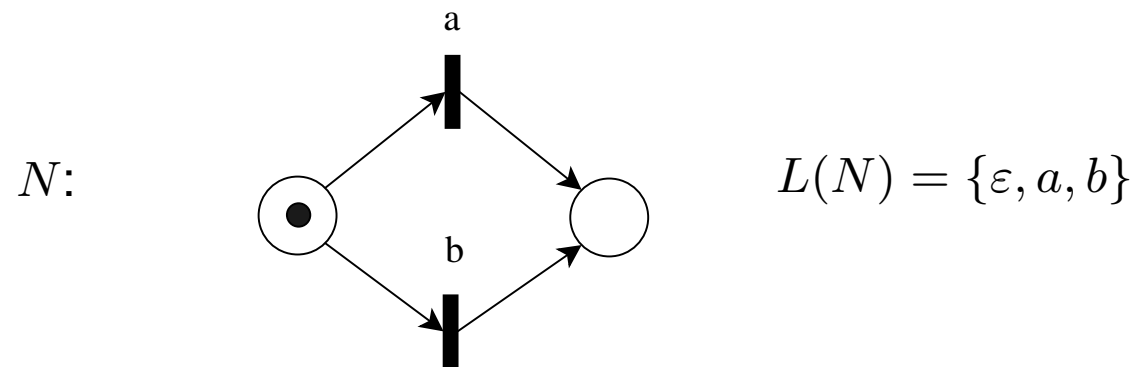
takto:

$$\delta(M, t\tau) = \delta(\delta(M, t), \tau), \tau \in T^*, t \in T$$
$$\delta(M, \varepsilon) = M, \text{ kde } \varepsilon \text{ je prázdný řetězec}$$

Posloupnost (řetězec) $\tau \in T^+$ nazveme *výpočetní posloupností* sítě N , je-li definována hodnota $\delta(M_0, \tau)$.

Množina všech výpočetních posloupností Petriho sítě N je základem pro definici *jazyka Petriho sítě*.

❖ **Příklad 1:**



Definice jazyků Petriho sítí

Vedle množiny přechodů T zavedeme *abecedu Petriho sítě* Σ a zobrazení $\lambda: T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, které každému přechodu sítě přiřadí symbol abecedy Σ nebo prázdný symbol ε . Zobrazení λ budeme nazývat *ohodnocením přechodů* (labeling) a příslušnou Petriho síť *ohodnocenou Petriho sítí*.

Podle tvaru zobrazení λ rozlišujeme 3 typy ohodnocených Petriho sítí:

1. Nejomezenější typ je dán injektivním ohodnocením $\lambda: T \rightarrow \Sigma$:

$$\forall t, t' \in T: \lambda(t) = \lambda(t') \Rightarrow t = t'$$

Tyto sítě jsou označovány jako *free-labeled Petri nets*.

2. Druhý typ nepřipouští ohodnocení prázdným symbolem ε :

$$\lambda: T \rightarrow \Sigma$$

3. Třetí typ připouští libovolné ohodnocení:

$$\lambda: T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$$

Počáteční stav a počáteční místo Petriho sítě

Dosud jsme za počáteční stav Petriho sítě považovali libovolné značení M_0 . Pro operace nad jazyky Petriho sítí je vhodné, aby počáteční stav byl spojen se značkou v jediném speciálním místě - *počátečním (startovacím) místě* p_s :

$$M_0(p_s) = 1 \quad \wedge \quad \forall p \in P \setminus \{p_s\}: M_0(p) = 0$$

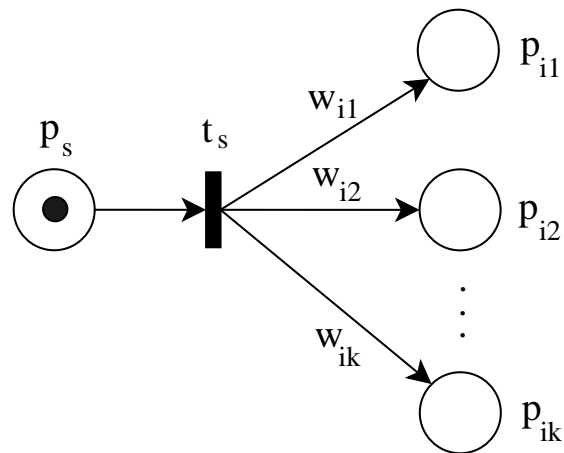
Ukážeme, že tato modifikace fakticky neomezuje výběr počátečního stavu Petriho sítě.

❖ Popis transformace

Uvažujme libovolnou Petriho síť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$. Ekvivalentní síť $N' = (P', T', F', W', K', M'_0)$ s počátečním místem p_s vytvoříme takto:

1. $P' = P \cup \{p_s\}$
2. $T' = T \cup \{t_s\}$
3. $F' = F \cup F_{t_s}$, kde $F_{t_s} = \{ \langle p_s, t_s \rangle \} \cup \{ \langle t_s, p \rangle \mid M_0(p) \neq 0 \}$
4. W' je rozšíření váhové funkce W :
 $W'(p_s, t_s) = 1 \wedge W'(t_s, p) = k \Leftrightarrow M_0(p) = k, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
5. K' je rozšíření K : $K'(p_s) = 1$
6. $M'_0: P \cup \{p_s\} \rightarrow \mathbb{N}, M'_0(p_s) = 1 \wedge \forall p \in P: M'_0(p) = 0$

❖ Příklad 2: Počáteční místo Petriho sítě



Na počátku je proveditelný pouze přechod t_s . Množiny výpočetních posloupností sítí N a N' se liší pouze tím, že každá výpočetní posloupnost sítě N' začíná symbolem t_s . Při ohodnocení $\lambda'(t_s) = \varepsilon$ a $\forall t \in T: \lambda'(t) = \lambda(t)$ jsou jazyky sítí N a N' shodné.

Koncové stavy a typy jazyků Petriho sítě

V závislosti na konceptu koncového stavu sítě byly definovány 4 typy jazyků Petriho sítí:

L, G, T, P

❖ **Definice 2:** Necht' N je Petriho síť s počátečním značením M_0 , s ohodnocením přechodů $\lambda: T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, s přechodovou funkcí $\delta: [M_0] \times T^* \rightarrow [M_0]$ a s množinou koncových stavů (značení) $Q_f \subseteq [M_0]$.

Jazyk $L(N) \subseteq \Sigma^*$ Petriho sítě N definovaný jako

$$L(N) = \{\lambda(\alpha) \mid \alpha \in T^* \wedge \delta(M_0, \alpha) \in Q_f\}$$

se nazývá *jazykem typu L*.

Tato definice není zcela v souladu se základní filozofií Petriho sítí, speciálně s pravidly provádění přechodů sítě. Je-li přechodová funkce $\delta(M, t)$ definována pro značení M , pak je také definována $\delta(M', t)$ pro každé $M' \geq M$.

❖ **Definice 3:** Necht' N je Petriho síť s počátečním značením M_0 , s ohodnocením přechodů λ , s přechodovou funkcí δ a s množinou koncových stavů Q_f . Jazyk $L(N)$ Petriho sítě N definovaný jako

$$L(N) = \{\lambda(\alpha) \mid \alpha \in T^* \wedge \exists M_f \in Q_f : \delta(M_0, \alpha) \geq M_f\}$$

se nazývá *jazykem typu G*.

❖ **Definice 4:** Necht' N je Petriho síť s počátečním značením M_0 , s ohodnocením přechodů λ a přechodovou funkcí δ .

1. Jazyk $L(N)$ Petriho sítě N definovaný jako

$$L(N) = \{\lambda(\alpha) \mid \alpha \in T^* \wedge \delta(M_0, \alpha) \in [M_0\rangle \wedge \forall t \in T : \delta(\delta(M_0, \alpha), t) = \text{nedef.}\}$$

se nazývá *jazykem typu T*.

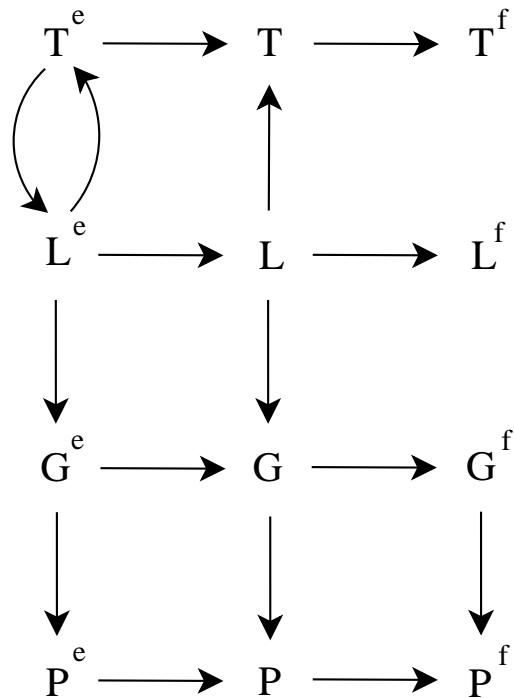
2. Jazyk $L(N)$ Petriho sítě N definovaný jako

$$L(N) = \{\lambda(\alpha) \mid \alpha \in T^* \wedge \delta(M, \alpha) \in [M_0\rangle\}$$

se nazývá *jazykem typu P*.

Uvažujeme-li nyní, že pro každou ze tříd L až P mohou být vymezeny tři třídy jazyků Petriho sítí podle typu ohodnocení λ , dostáváme celkem dvanáct specifických tříd. Mezi těmito třídami existují vztahy vyjádřitelné množinovou inkluzí.

❖ **Příklad 3:** Třídy jazyků Petriho sítí podle typu ohodnocení λ a jejich vzájemné vztahy



Orientovaná hrana z A do B vyjadřuje inkluzi $B \subseteq A$.

Základní vztahy:

$$L^f \subseteq L \subseteq L^e$$

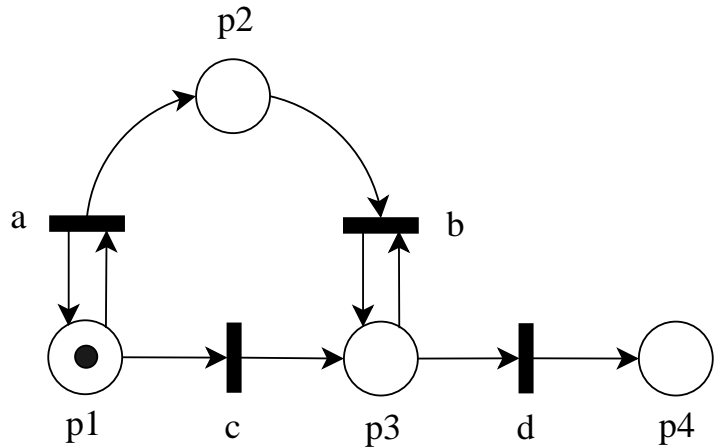
$$G^f \subseteq G \subseteq G^e$$

$$T^f \subseteq T \subseteq T^e$$

$$P^f \subseteq P \subseteq P^e$$

\mathcal{L}^e , resp. \mathcal{L} , resp. \mathcal{L}^f značí třídu jazyků s ohodnocením $\lambda: T \rightarrow \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, resp. $\lambda: T \rightarrow \Sigma$, resp. $\lambda: T \rightarrow \Sigma$ s injektivním λ (free-labeled).

❖ **Příklad 4:** Ilustrace různých typů jazyků Petriho sítí



Uvažujme: $Q_f = \{(0, 0, 1, 0)\}$ a $M_0 = (1, 0, 0, 0)$

L-typ: $L = \{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$

G-typ: $L = \{a^m c b^n \mid m \geq n \geq 0\}$

T-typ: $L = \{a^m c b^n d \mid m \geq n \geq 0\}$

P-typ: $L = \{a^m \mid m \geq 0\} \cup \{a^m c b^n \mid m \geq n \geq 0\} \cup \{a^m c b^n d \mid m \geq n \geq 0\}$

2. Vlastnosti jazyků Petriho sítí typu L

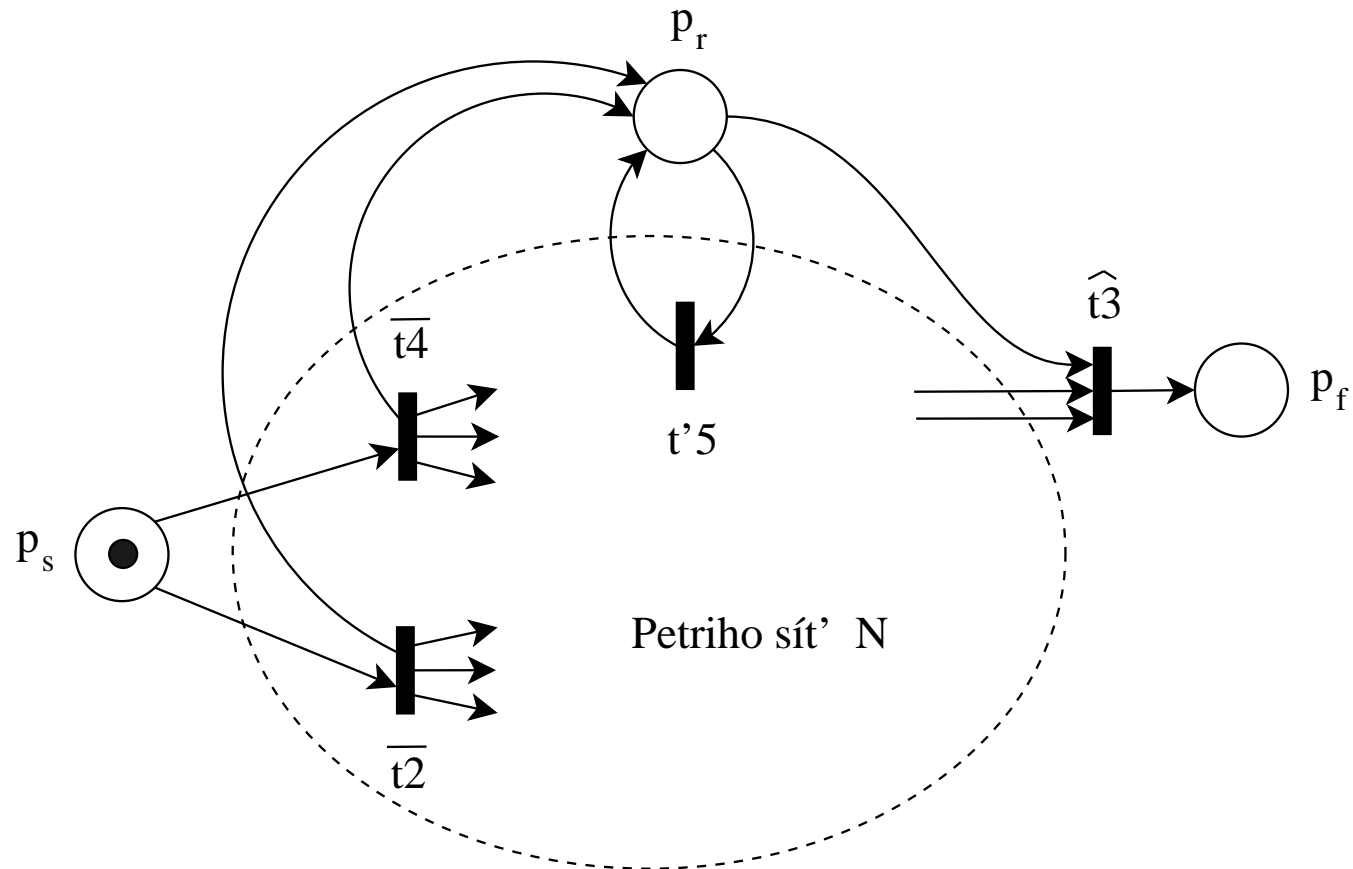
❖ **Definice 5:** Petriho síť $N = (P, T, F, W, M_0, p_s, \Sigma, \lambda, P_f, Q_f)$ nazveme *ohodnocenou Petriho sítí ve standardním tvaru*, jestliže:

1. Složky $P, T, F, W, M_0, \Sigma, Q_f$ mají dosud užívaný význam
2. $p_s \in P$ je počáteční místo takové, že
 - (a) $M_0(p_s) = 1 \wedge \forall p \in P \setminus \{p_s\}: M_0(p) = 0$
 - (b) $\forall t \in T: \langle t, p_s \rangle \notin F$
3. $\lambda: T \rightarrow \Sigma$ je ohodnocení přechodů sítě
4. $P_f \subseteq P$ je množina koncových míst
 - (a) $P_f = \begin{cases} \{p_f, p_s\}, & \text{jestliže } \varepsilon \in L(N) \\ \{p_f\}, & \text{jestliže } \varepsilon \notin L(N) \end{cases}$
 - (b) $\forall t \in T: \langle p_f, t \rangle \notin F$
 - (c) Je-li $M(p_f) > 0$ pro nějaké $M \in [M_0]$, pak $\delta(M, t)$ je nedefinována pro všechna $t \in T$

❖ **Věta 1:** Ke každé ohodnocené Petriho síti N (typu \mathbf{L}) existuje ekvivalentní ohodnocená Petriho síť N' ve standardním tvaru taková, že $L(N) = L(N')$.

Důkaz: Viz. skripta str. 53-55

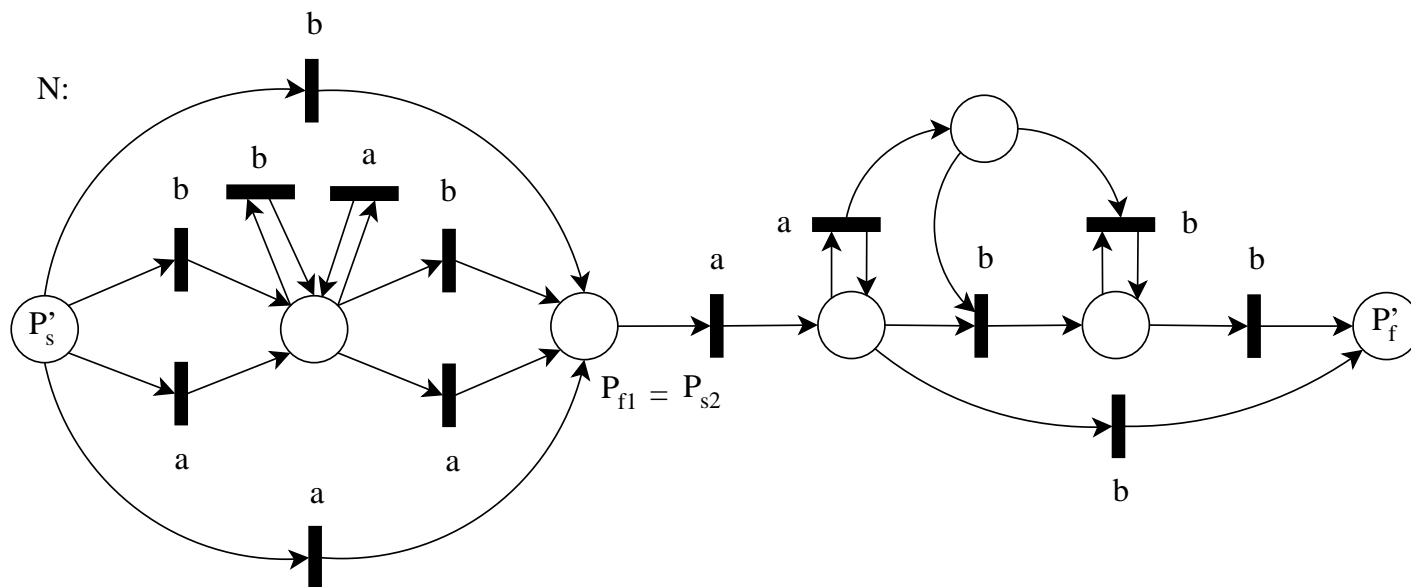
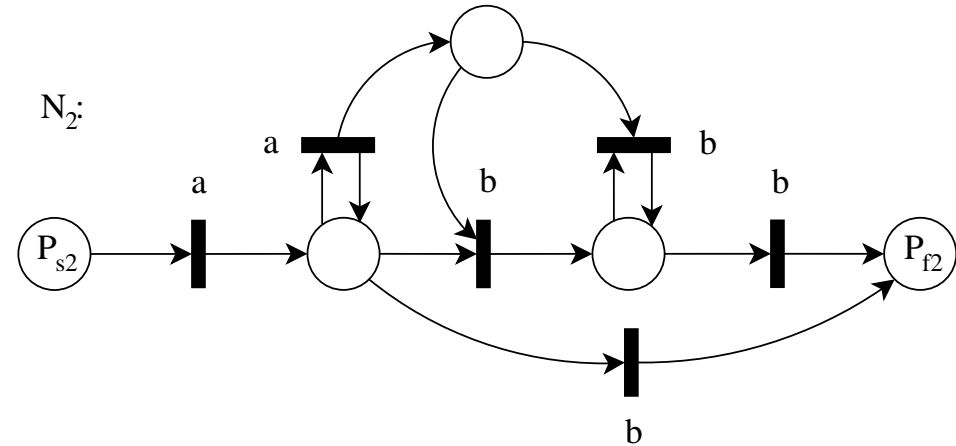
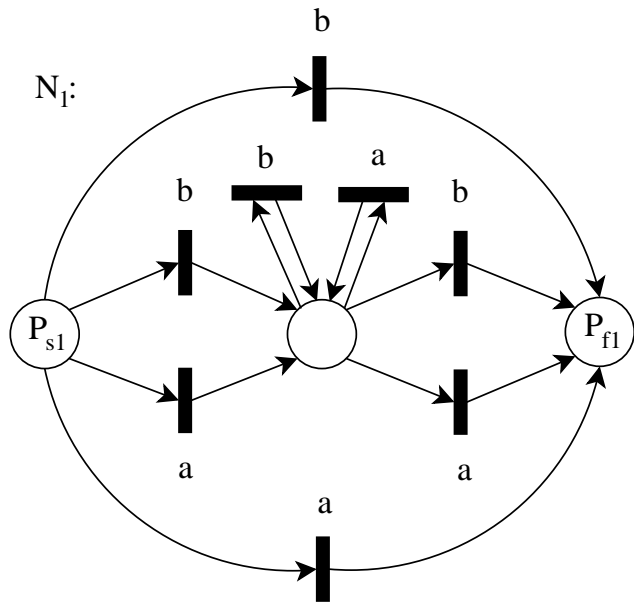
❖ **Příklad 5:** Konstrukce Petriho sítě ve standardním tvaru



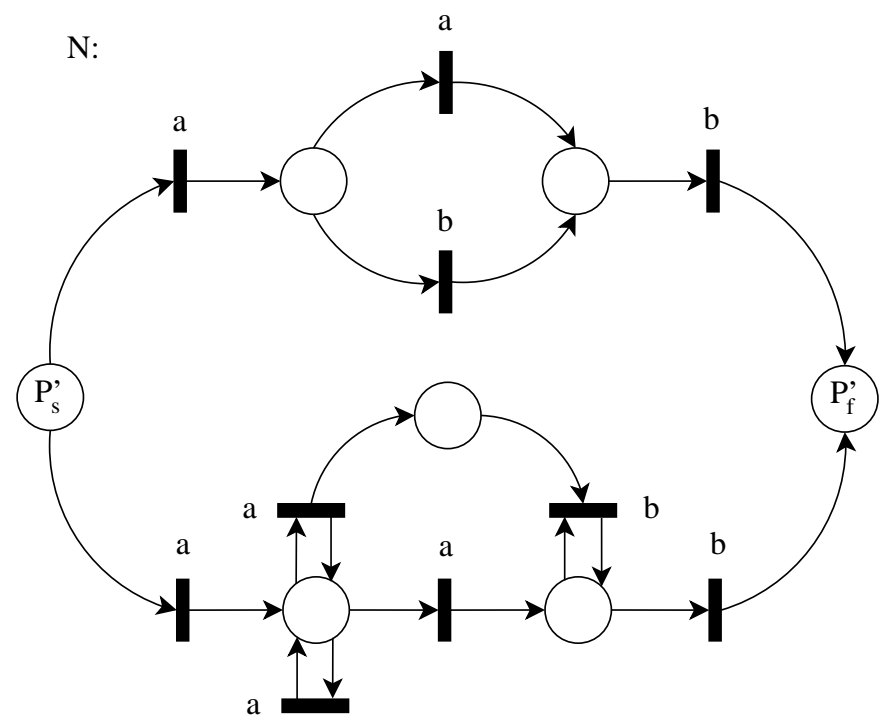
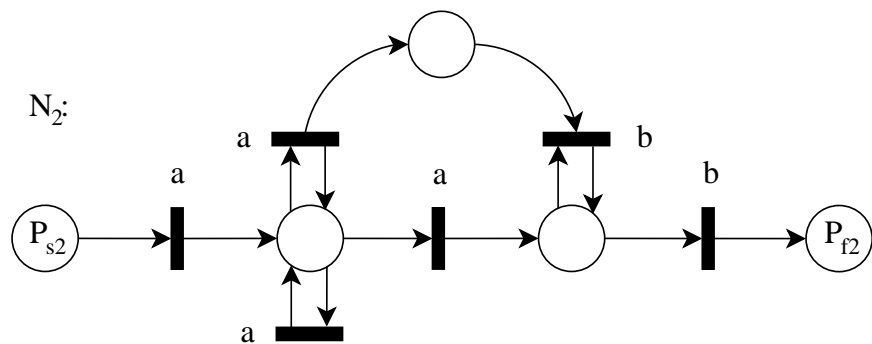
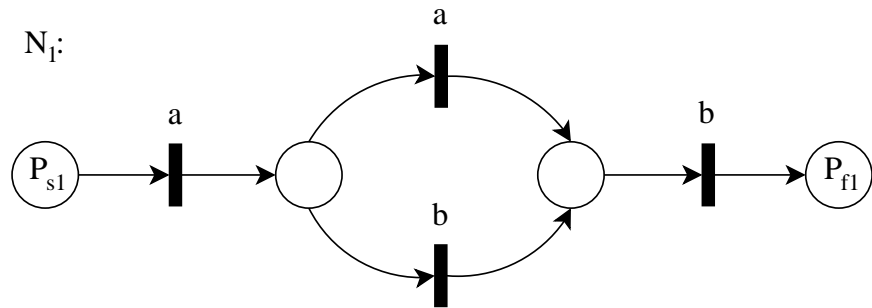
Uzávěrové vlastnosti jazyků Petriho sítí

- ❖ **Věta 2:** Necht' L_1 a L_2 jsou dva jazyky generované Petriho sítěmi. Pak jazyk $L = L_1.L_2$ je také jazykem generovaným Petriho sítí.
- ❖ **Věta 3:** Necht' L_1 a L_2 jsou dva jazyky generované Petriho sítěmi. Pak jazyk $L = L_1 \cup L_2$ je také jazykem generovaným Petriho sítí.
- ❖ **Věta 4:** Necht' L_1 a L_2 jsou dva jazyky generované Petriho sítěmi. Pak jazyk $L = L_1 \cap L_2$ je také jazykem generovaným Petriho sítí.
- ❖ **Věta 5:** Jazyky Petriho sítí jsou uzavřeny vzhledem k reverzi, tj. je-li $L = L(N)$ jazyk generovaný Petriho sítí N , pak existuje Petriho síť N' , $L(N') = L^R$.

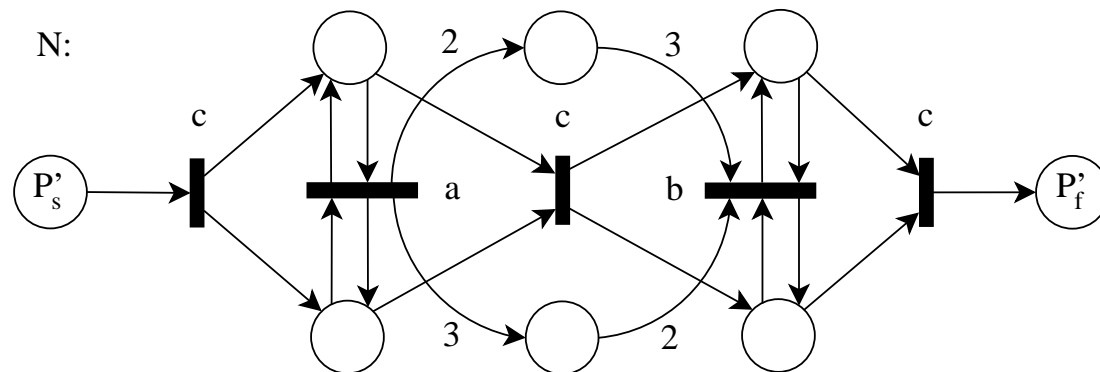
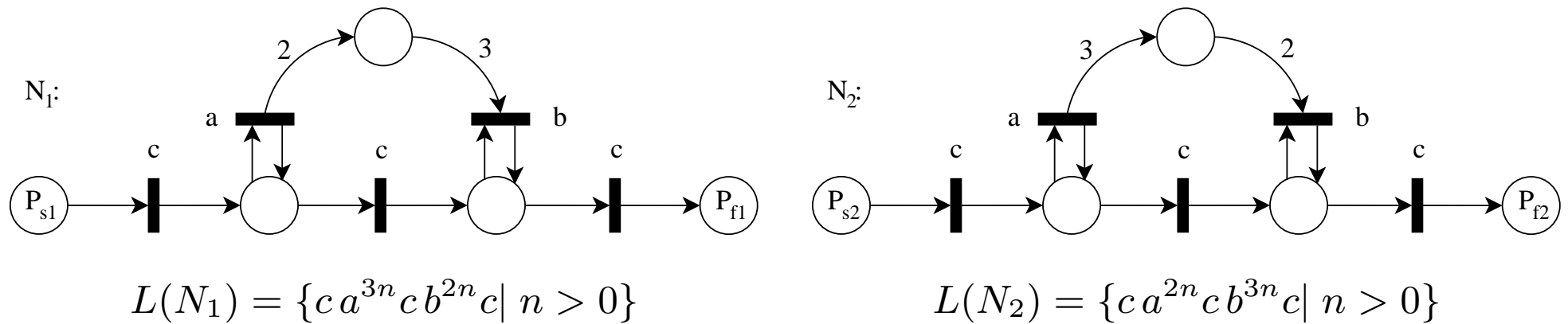
❖ **Příklad 6:** Ilustrace konkatence Petriho sítí, $L(N) = L(N_1).L(N_2)$



❖ **Příklad 7:** Ilustrace sjednocení Petriho sítí, $L(N) = L(N_1) \cup L(N_2)$



❖ **Příklad 8:** Ilustrace průniku Petriho sítí, $L(N) = L(N_1) \cap L(N_2)$



Pro modelování paralelní činnosti dvou Petriho sítí zavedeme speciální operátor *paralelní kompozice* řetězců a jazyků (concurrency operator), který se označuje symbolem \parallel

❖ **Definice 6:** Necht' $x_1, x_2 \in \Sigma^*$ jsou dva řetězce nad abecedou Σ a necht' $a, b \in \Sigma$. *Paralelní kompozici* (spojení) dvou řetězců definujeme rekurentně:

$$\begin{aligned} ax_1 \parallel bx_2 &= a(x_1 \parallel bx_2) + b(ax_1 \parallel x_2) \\ a \parallel \varepsilon &= \varepsilon \parallel a = a \end{aligned}$$

Paralelní kompozice $L_1 \parallel L_2$ jazyků L_1 a L_2 je definována předpisem:

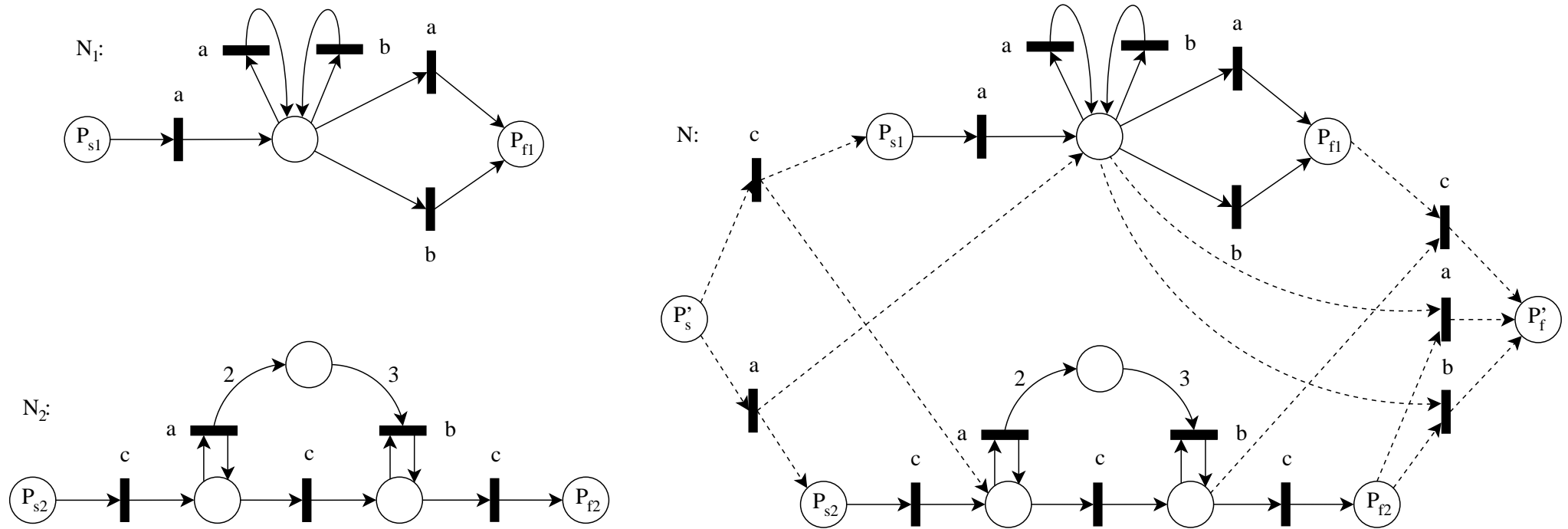
$$L_1 \parallel L_2 = \{x \parallel y : x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$

❖ **Příklad 9:**

Je-li $L_1 = \{ab\}$ a $L_2 = \{c\}$, pak $L_1 \parallel L_2 = \{abc, acb, cab\}$

❖ **Věta 6:** Necht' L_1 a L_2 jsou dva jazyky generované Petriho sítěmi. Pak jazyk $L = L_1 \parallel L_2$ je také jazykem generovaným Petriho sítí.

❖ **Příklad 10:** Ilustrace paralelní kompozice Petriho sítí, $L(N) = L(N_1) || L(N_2)$



❖ **Věta 7:** Jazyky Petriho sítí (typu L) jsou uzavřeny vzhledem ke konečnému počtu aplikací operací:

- sjednocení
- konkatenaci
- průniku
- paralelní kompozici
- reverzi jazyka

❖ **Věta 8:** Jazyky Petriho sítí nejsou uzavřeny vzhledem k operaci iterace jazyka.

Důležitou operací, popisující princip abstrakce je operace substituce. Necht' L je jazyk do něhož provádíme substituci, tj. nahrazujeme každý symbol $a \in \Sigma$ každé věty $x \in L$.

Můžeme rozlišit tři typy substituce:

1. obecná substituce (L_a je libovolný formální jazyk)
2. konečná substituce (L_a je konečný jazyk)
3. homomorfismus (L_a je tvořen jediným řetězcem)

❖ **Věta 9:** Jazyky Petriho sítí nejsou uzavřeny vzhledem k obecné substituci.

Důkaz:

Uvažujme jazyk $L_c = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ substituovaný do jazyka $L = \{c^i \mid i \geq 1\}$. L_c i L jsou zřejmě jazyky Petriho sítí. Výsledkem substituce je jazyk

$L' = \{a^{m_1} b^{m_1} \dots a^{m_k} b^{m_k} \mid m_i \geq 1, k \geq 1\} = L_c^+$, což podle Věty 8 není jazyk Petriho sítí.

❖ **Věta 10:** Nechť L_1 je jazyk generovaný Petriho sítí a L_2 je regulární jazyk. Pak jazyk L , který vznikne konečnou substitucí jazyka L_2 do jazyka L_1 , je jazyk generovatelný Petriho sítí.

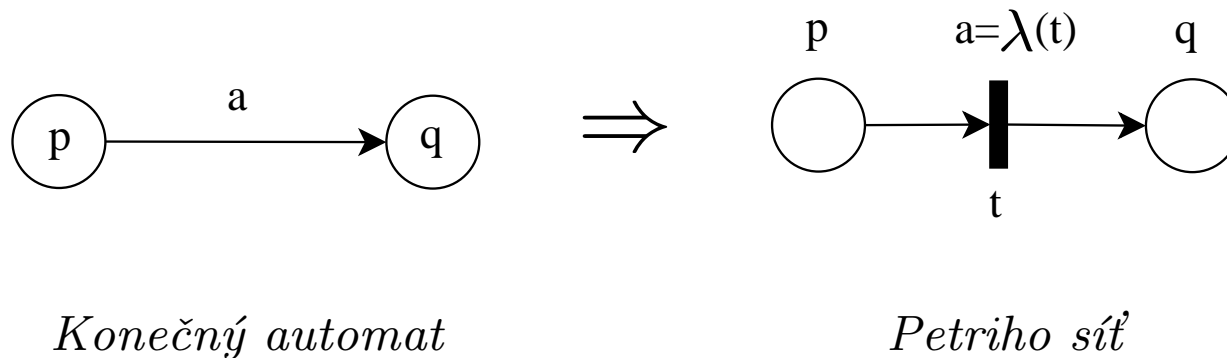
Vztah jazyků Petriho sítí k Chomského hierarchii jazyků

❖ **Věta 11:** Každý regulární jazyk je jazykem generovaným Petriho sítí.

Důkaz:

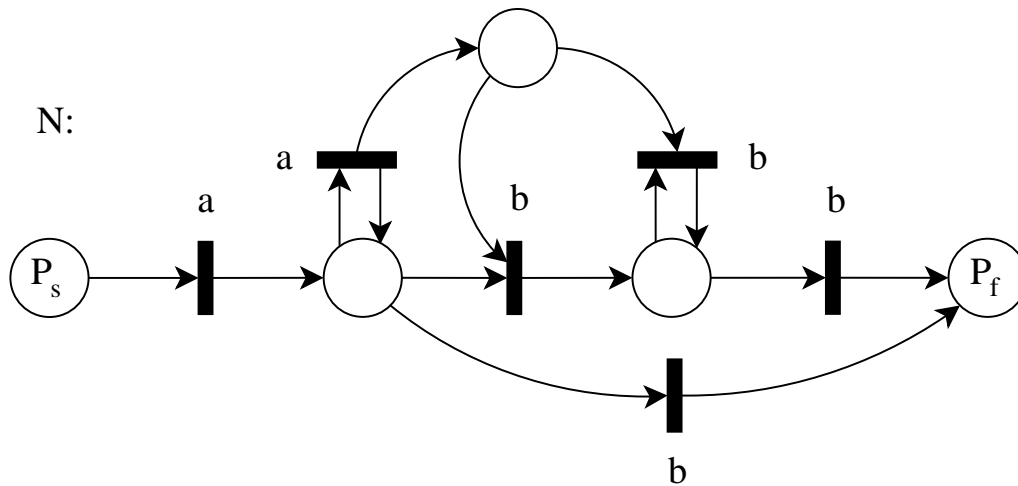
Je třeba ukázat, že ke každému konečnému automatu M lze sestavit ohodnocenou Petriho síť N tak, že $L(M) = L(N)$.

Princip konstrukce:



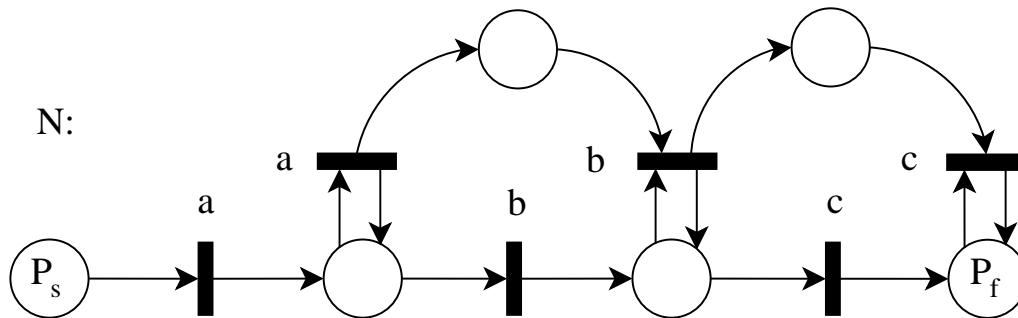
Studujme nyní vztah jazyků Petriho sítí k vyšším třídám Chomského hierarchie.

❖ **Příklad 11:**



$$L(N) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$$

❖ **Příklad 12:**



$$L(N) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

❖ **Lemma 1:** Jazyk $L = \{w w^R \mid w \in \Sigma^*\}$ není jazykem Petriho sítí.

Důkaz:

Nejprve odvodíme nutnou podmínku pro mohutnost stavového prostoru Petriho sítě generující jazyk L a pak ukážeme, že tato podmínka nemůže být splněna.

Předpokládejme tedy, že existuje Petriho síť N taková, že $L = L(N)$. Necht' $|\Sigma| = k$, $k > 1$ a uvažujme řetězec $x x^R \in L$, $|x| = r$. Protože existuje k^r různých možných řetězců x , musí stavový prostor Petriho sítě N obsahovat alespoň k^r různých stavů (dostupných značení) tak, aby provedení r přechodů generujících řetězec x vedlo k jednoznačnému “zapamatování” struktury řetězce x . Skutečně, pokud bychom disponovali menším počtem stavů, pak by pro jisté řetězce x_1 a x_2 platilo $\delta(M_0, x_1) = \delta(M_0, x_2)$ pro $x_1 \neq x_2$. Pak ale

$$\delta(M_0, x_1 x_2^R) = \delta(\delta(M_0, x_1), x_2^R) = \delta(\delta(M_0, x_2) x_2^R) = \delta(M_0, x_2 x_2^R) \in Q_f$$

a tedy by platilo $x_1 x_2^R \in L$ pro $x_1 \neq x_2$, což je spor s definicí jazyka L .

Důkaz: (pokračování)

Nyní však ukážeme, že podmínka, aby provedení výpočetní posloupnosti délky r aktualizovalo libovolný ze stavů množiny o mohutnosti k^r , je nespílitelná. Uvažujme takovouto výpočetní posloupnost:

$$M_0[t_1\rangle M_1[t_2\rangle \dots [t_r\rangle M_r$$

a předpokládejme, že množina přechodů T Petriho sítě N má mohutnost $|T| = m$.

Značení M_r můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$M_r = M_0 + \underline{N}.u$$

kde \underline{N} je matice změn Petriho sítě a u je vektor $u : T \rightarrow \mathbb{N}$ se složkami

$$u(t) = |\{i \mid t_i = t \wedge 1 \leq i \leq r\}|$$

Zřejmě platí:

$$\sum_{t \in T} u(t) = r$$

Důkaz: (pokračování)

V nejlepším případě každý z vektorů u splňující tuto podmínku generuje různý stav M_r .

K vyčíslení počtu různých vektorů u použijeme vztah pro počet rozkladů čísla $r \in \mathbb{N}$ na m nezáporných celočíselných členů (dávající v součtu r), který je roven kombinačnímu číslu:

$$\binom{r + m - 1}{m - 1}$$

Protože

$$\binom{r + m - 1}{m - 1} = \frac{(r + m - 1) \dots (r + 1)}{(m - 1)!} < (r + m)^m$$

je počet dosažitelných stavů po provedení r přechodů ostře menší než $(r + m)^m$. Pro dostatečně velké r pak platí $(r + m)^m < k^r$ a nutná podmínka pro generování řetězce xx^R tedy není splněna (spor s požadovanou velikostí stavového prostoru). Jazyk L tedy není jazykem Petriho sítí.

Důkaz: (pokračování)

Závěr:

Nekompatibilita stavových prostorů Petriho sítí a zásobníkových automatů:

- Petriho sítě - kombinatoricky rostoucí počet dostupných stavů
- Zásobníkové automaty - exponenciálně rostoucí počet dostupných stavů

Na druhé straně *odlišnosti v řízení*:

- Petriho sítě - libovolný čítač (místo)
- Zásobníkové automaty - vrchol zásobníku

❖ **Definice 7:** Bezkontextový jazyk L se nazývá *omezeným bezkontextovým jazykem* (bounded context free language) nad abecedou Σ , jestliže existují řetězce $w_1, w_2, \dots, w_n \in \Sigma^*$ takové, že $L \subseteq w_1^* w_2^* \dots w_n^*$

❖ **Věta 12:** Třída omezených bezkontextových jazyků je nejmenší třída jazyků splňující podmínky:

- (1) Je-li B konečná podmnožina množiny Σ^* , pak B je omezený bezkontextový jazyk.
- (2) Jsou-li B_1 a B_2 omezené bezkontextové jazyky, pak $B_1 \cup B_2$, $B_1.B_2$ jsou omezené bezkontextové jazyky.
- (3) Je-li B omezený bezkontextový jazyk a $x, y \in \Sigma^*$, pak jazyk $\{x^i B y^i \mid i \geq 0\}$ je omezený bezkontextový jazyk.

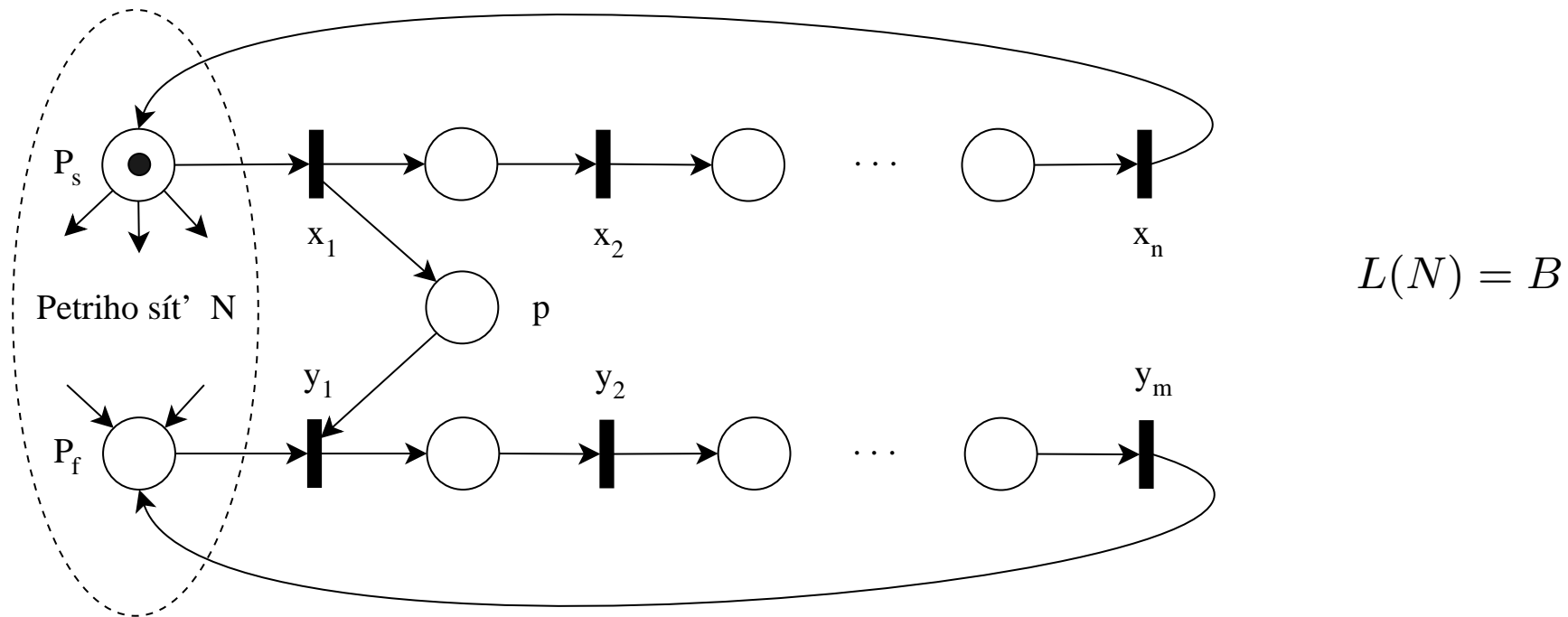
❖ **Věta 13:** Každý omezený bezkontextový jazyk je jazykem generovaným Petriho sítí.

Důkaz:

K důkazu využijeme tvrzení předchozí Věty 12. Ukážeme, že každá z podmínek (1) až (3) platí v určité podtřídě jazyků Petriho sítí a tudíž existuje podtřída jazyků Petriho sítí, které generují právě omezené bezkontextové jazyky.

- (a) Jazyk splňující (1) je regulární a tedy je jazykem Petriho sítí.
- (b) Podmínka (2) je splněna pro všechny jazyky Petriho sítí.
- (c) Abychom ukázali, že je splněna i podmínka (3), popíšeme konstrukci Petriho sítě generující jazyk $\{x^i B y^i \mid i \geq 0\}$. Předpokládejme, že jazyk B je generován Petriho sítí N (Příklad 13) ve standardním tvaru a necht' $x = x_1 x_2 \dots x_n$ a $y = y_1 y_2 \dots y_m$.

❖ **Příklad 13:** Petriho síť generující omezený bezkontextový jazyk



Pomocné místo p má funkci čítače. Každé generování řetězce $x = x_1x_2 \dots x_n$ zvýší počet značek místa p o jedničku. Protože koncový stav sítě vyžaduje značku pouze v místě p_f , je tedy řetězec $y = y_1y_2 \dots y_m$ generován právě tolikrát, kolikrát byl generován řetězec x .

❖ **Věta 13:** Všechny jazyky Petriho sítí jsou kontextové jazyky.

Důkaz:

Ukažme, že jazyk L Petriho sítě N může být přijímán lineárně omezeným Turingovým strojem.

Nechť páska Turingova stroje uchovává momentální značení každého místa Petriho sítě N . Po přečtení vstupního symbolu je simulováno provedení příslušného přechodu, tj. změna značení některých míst. Kvantifikujme využívanou část pásky celkovým součtem S všech značek všech míst a zkoumejme, jak se tento součet mění v závislosti na délce vstupního řetězce.

Nechť vstupnímu řetězci délky $k \geq 1$ odpovídá výpočetní posloupnost $t_1 t_2 \dots t_k$ provedených přechodů Petriho sítě N . Označme d_t počet značek, kterým přispívá přechod t (jeho provedení) k celkovému počtu značek sítě. Zřejmě platí:

$$d_t = \sum_{p \in t^\bullet} W(t, p) - \sum_{p \in {}^\bullet t} W(p, t)$$

Důkaz: (pokračování)

Pak počet značek S po provedení výpočetní posloupnosti $t_1 \dots t_k$ lze vyjádřit ve tvaru:

$$S = 1 + \sum_{i=1}^k d_{t_i}$$

Z definice Petriho sítě plyne existence maxima:

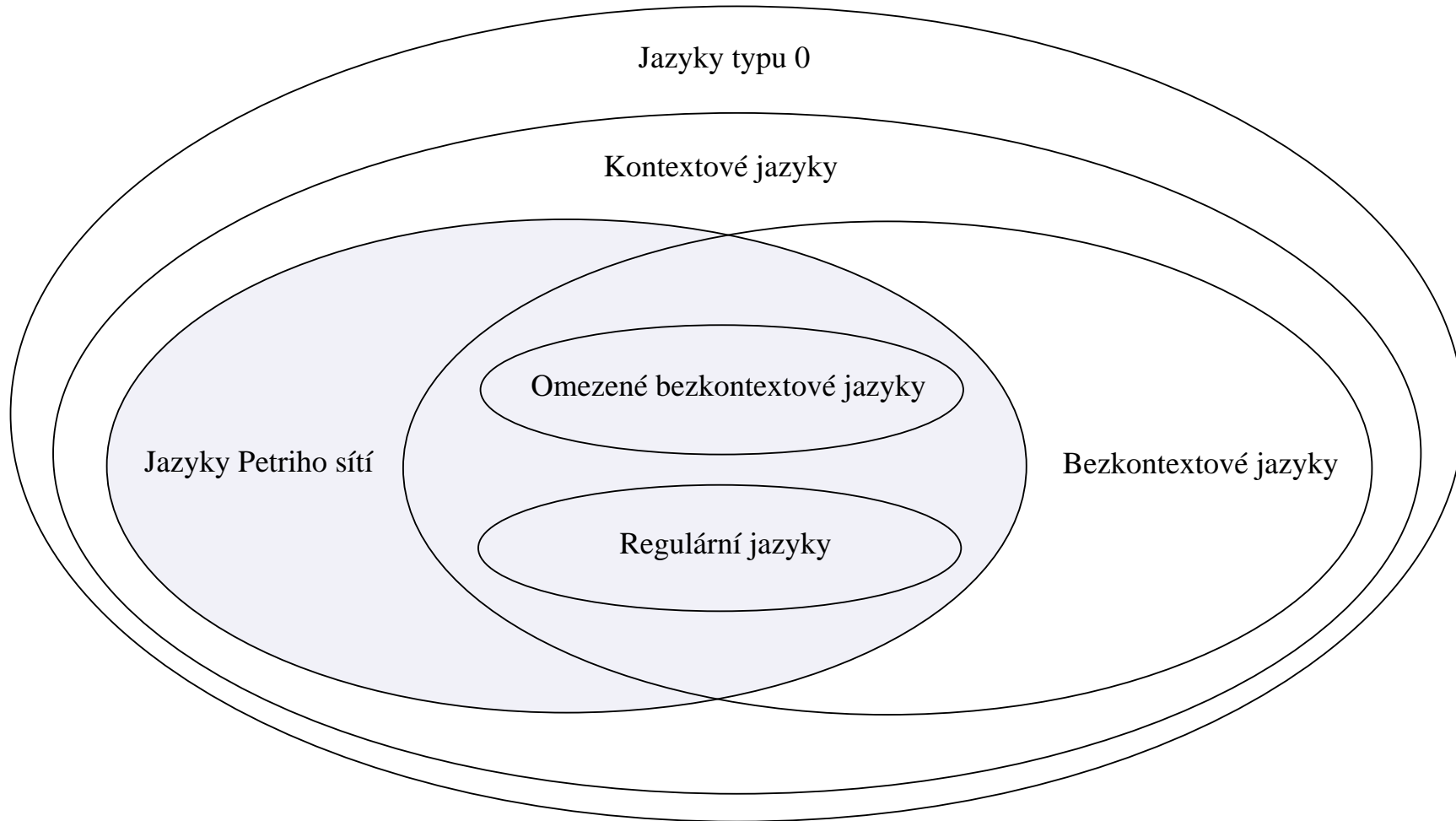
$$m = \max_{t \in T} d_t$$

S jehož využitím lze hodnoty S ohraničit v závislosti na délce výpočetní posloupnosti k a tudíž i vstupního řetězce funkcí:

$$S(k) \leq 1 + k.m$$

Což je lineární funkce nezávislé proměnné k a příslušný Turingův stroj je tedy lineárně omezený.

❖ **Příklad 14:** Vztah jazyků Petriho sítí a jazyků Chomského hierarchie



Otázka:

Čím lze rozšířit modelovací schopnost Petriho sítí?