P/T Petriho sítě

1. Základní pojmy

❖ **Definice 1:** Šestici $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ nazýváme *P/T Petriho sítí* (Place/Transition Petri Net), jestliže:

1. (P, T, F) je konečná síť
2. $W: F \rightarrow \mathbb{N} \backslash \{0\}$ je ohodnocení hran grafu určující kladnou *váhu* každé hrany sítě
3. $K: P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ je zobrazení určující *kapacitu* každého místa
4. $M_0: P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ je *počáteční značení* míst Petriho sítě takové, že $\forall p \in P: M_0(p) \leq K(p)$

Poznámka:

- $\mathbb{N}$ je množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- ω značí *supremum* množiny $\mathbb{N}$ s vlastnostmi:
  1. $\forall n \in \mathbb{N}: n < \omega$
  2. $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}: m + \omega = \omega + m = \omega - m = \omega$
- Petriho sítí budeme dále rozumět P/T Petriho síť

❖ **Definice 2:** (*Evoluční pravidla Petriho sítí*)
Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť.

1. Zobrazení $M: P \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ se nazývá *značení* (marking) Petriho sítě N, jestliže $\forall p \in P: M(p) \leq K(p)$
2. Nechť M je značení Petriho sítě N. Přechod $t \in T$ je *proveditelný* (enabled) *při značení* M (stručněji M*-proveditelný*), jestliže

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall p \in {}^\bullet t: M(p) \geq W(p,t) \\ \forall p \in t^\bullet: M(p) \leq K(p) - W(t,p) \end{array}}$$

❖ Definice 2. (pokračování)

3. Je-li $t \in T$ M-proveditelný, pak jeho *provedením* získáme *následné značení* M' ke značení M, které je definováno takto:

$$\boxed{\forall p \in P: M'(p) = \begin{cases} M(p) - W(p,t) & \text{je-li } p \in {}^{\bullet}t \setminus t^{\bullet} \\ M(p) + W(t,p) & \text{je-li } p \in t^{\bullet} \setminus {}^{\bullet}t \\ M(p) - W(p,t) + W(t,p) & \text{je-li } p \in {}^{\bullet}t \cap t^{\bullet} \\ M(p) & \text{jinak} \end{cases}}$$

Provedení přechodu t (transition firing) ze značení M do značení M' zapisujeme symbolicky:

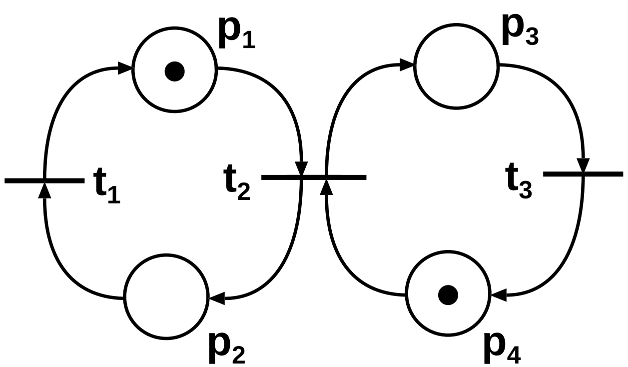
$$\boxed{M[t\rangle M'}$$

❖ Definice 2. (pokračování)

4. Označme $[M\rangle$ nejmenší množinu různých značení Petriho sítě N, pro kterou platí:
   (a) $M \in [M\rangle$
   (b) Je-li $M_1 \in [M\rangle$ a pro nějaké $t \in T$ platí $M_1[t\rangle M_2$, pak $M_2 \in [M\rangle$.

   Množina $[M\rangle$ se nazývá *množinou dosažitelných značení* (reachability set) *ze značení* M.
   Množina $[M_0\rangle$ se nazývá *množinou dosažitelných značení sítě* N.

❖ **Příklad 1**: Uvažujme následující Petriho síť:



$[M_0\rangle = \{M_0, M_1, M_2, M_3\}$, kde

$$M_0 = (1,0,0,1)$$
$$M_1 = (0,1,1,0)$$
$$M_2 = (1,0,1,0)$$
$$M_3 = (0,1,0,1)$$

2. Stavový prostor a přechodová funkce Petriho sítě

❖ Množina $[M_0\rangle$ reprezentuje *stavový prostor Petriho sítě*. Mohou nastat dva případy:

$$[M_0\rangle \quad \begin{cases} \text{je konečná množina} \\ \text{je spočetná nekonečná množina} \end{cases}$$

❖ **Definice 3.** Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť a $[M_0\rangle$ její množina dosažitelných značení. *Přechodovou funkcí Petriho sítě* N nazveme funkci δ:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta\colon [M_0\rangle \times T \to [M_0\rangle, \text{ pro kterou} \\ \forall t \in T\colon\ \ \forall M, M' \in [M_0\rangle\colon\ \ \delta(M,t) = M' \stackrel{def.}{\Longleftrightarrow} M[t\rangle M' \end{array}}$$

- Přechodová funkce δ může být zobecněna na posloupnost přechodů:

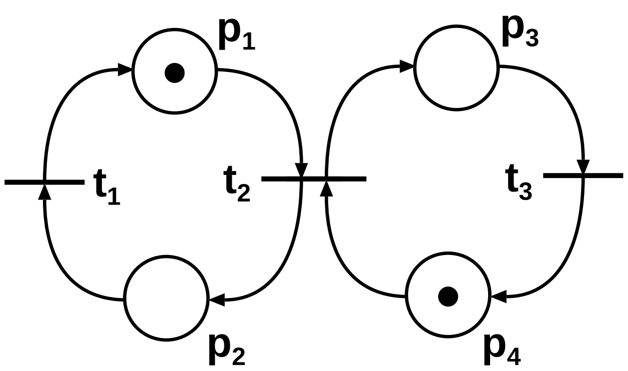
$$\delta : [M_0\rangle \times T^* \rightarrow [M_0\rangle$$

takto:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta(M, t\tau) = \delta(\delta(M, t), \tau),\ \tau \in T^* \\ \delta(M, \varepsilon) = M,\ \text{kde } \varepsilon \text{ je prázdný symbol} \end{array}}$$

- Řetězec $\tau \in T^+$ nazveme *výpočetní posloupností* Petriho sítě, je-li $\delta(M_0, \tau)$ definována (+ případné další podmínky).
- *Jazyk Petriho sítě* = množina výpočetních posloupností Petriho sítě.

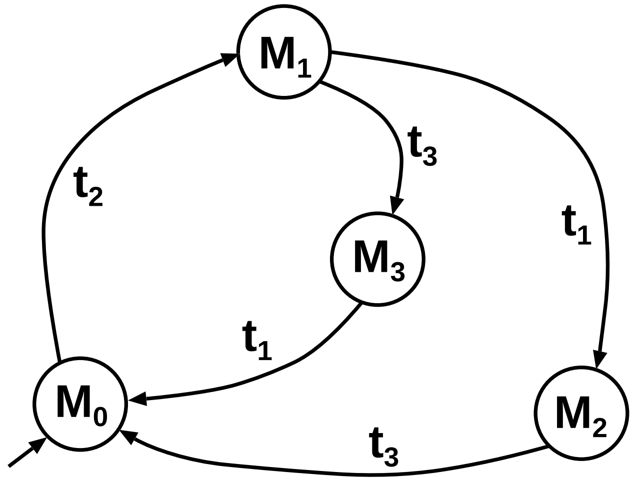
❖ **Příklad 2**: Uvažme Petriho síť z příkladu 1 a její množinu dosažitelných značení:



$[M_0\rangle = \{M_0, M_1, M_2, M_3\}$, kde

$$M_0 = (1,0,0,1)$$
$$M_1 = (0,1,1,0)$$
$$M_2 = (1,0,1,0)$$
$$M_3 = (0,1,0,1)$$

Odpovídající přechodová funkce specifikovaná grafem vypadá takto:



Množina výpočetních posloupností dané Petriho sítě pak může být charakterizována regulárním výrazem:

$$(t_2(t_3t_1 + t_1t_3))^*$$

Každý neprázdný prefix řetězce specifikovaného tímto výrazem tvoří výpočetní posloupnost.

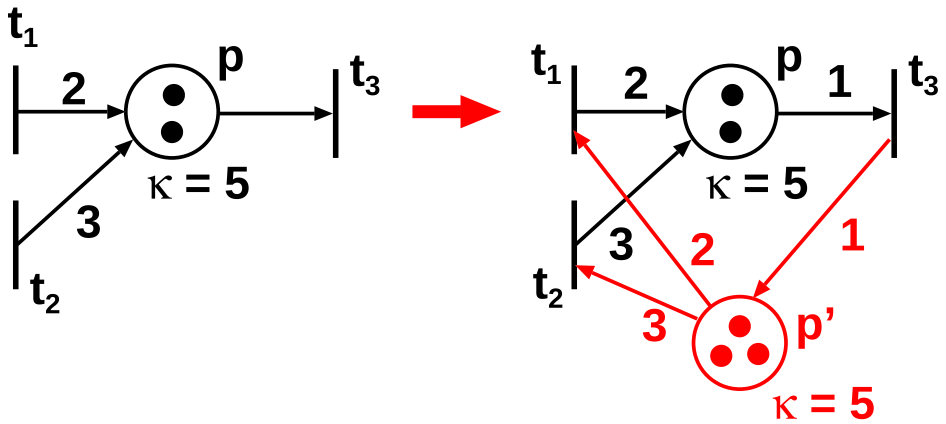
3. Komplementace Petriho sítě

❖ **Definice 4.** Petriho síť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ se nazývá *bezkontaktní* (contact free), jestliže pro všechna $M \in [M_0\rangle$ a všechny $t \in T$ platí:

jestliže $\forall p \in {}^\bullet t: \ M(p) \geq W(p,t)$ (tj. t je M-proveditelný),
pak $\forall p \in t^\bullet: \ M(p) \leq K(p) - W(t,p)$

❖ **Věta 1.** Každá Petriho síť může být převedena na bezkontaktní Petriho síť.

Důkaz: Petriho síť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ převedeme na bezkontaktní Petriho síť $N' = (P', T, F', W', K', M_0')$ transformací, kdy přidáme "komplementární místa" a hrany takto:



Popis transformace:

1. $\forall p \in P$, pro která $K(p) \neq \omega$, vytvoř $p' \in P'$
2. $\forall <t, p>$, resp. $<p, t> \in F$ vytvoř $<p', t>$, resp. $<t, p'> \in F'$
3. Polož $M_0'(p') = K(p) - M_0(p)$
4. Polož $W'(p', t) = W(t, p) \wedge W'(t, p') = W(p, t)$

Zřejmě platí: $\forall M \in [M_0\rangle : \; M(p) + M(p') = K(p)$

4. Maticová reprezentace Petriho sítě

- **Definice 5.** Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť.
  - *Tokovou* nebo *incidenční maticí* (flow/incidence matrix) Petriho sítě N nazveme matici

$$\underline{F} \colon P \times T \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

jejíž prvky $\underline{F}(p,t)$ jsou pro všechna $p \in P$ a $t \in T$ definovány takto:

$$\boxed{\underline{F}(p,t) = < \overline{W}(p,t), \overline{W}(t,p) > \text{ , kde } \overline{W}(x,y) = \begin{cases} W(x,y) & \text{pro } (x,y) \in F \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}}$$

❖ Definice 5. (pokračování)

- *Maticí změn* (change matrix) Petriho sítě N nazveme "složenou matici"

$$\underline{N}\colon P \times T \to \mathbb{Z}$$

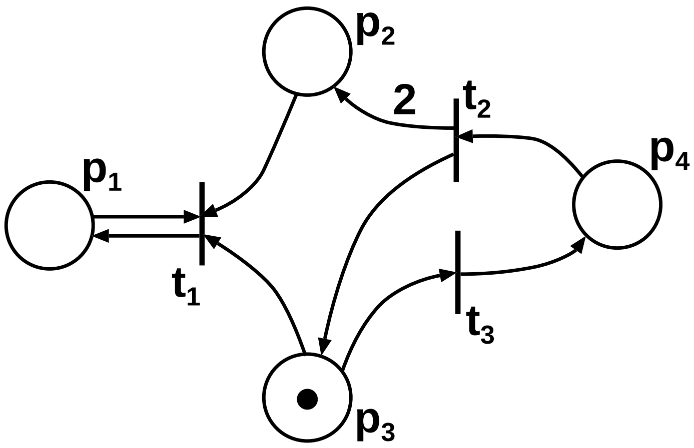
jejíž prvky $\underline{N}(p,t)$ jsou pro všechna $p \in P$ a $t \in T$ definovány takto:

$$\boxed{\underline{N}(p,t) = \overline{W}(t,p) - \overline{W}(p,t)}$$

❖ **Poznámka**:

- Matice $\underline{N}$ se často jednoduše nazývá *maticí Petriho sítě*.
- Dále označme $\forall t \in T$ funkci (vektor) $\underline{t}\colon P \to \mathbb{Z}$ tak, že $\forall p \in P\colon\ \underline{t}(p) = \underline{N}(p,t)$

❖ **Příklad 3**:



$$\text{Toková matice } \underline{F} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,2) & (0,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\text{Matice změn } \underline{N} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Například $\underline{t}_1 = (0, -1, -1, 0)$