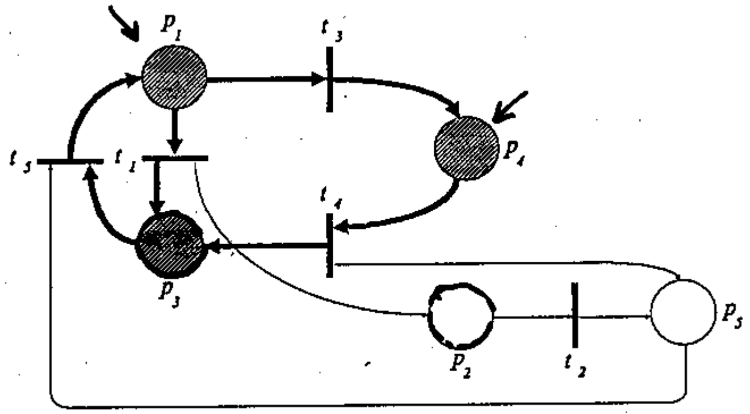
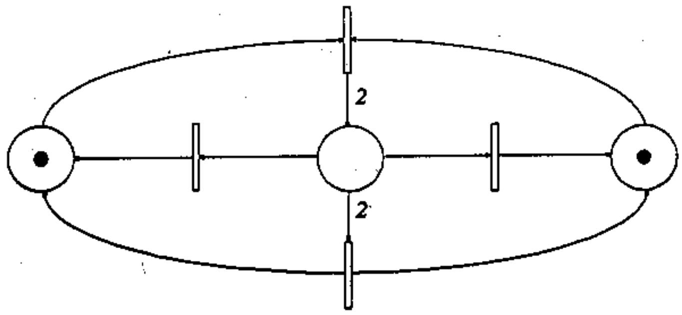
Na Obr. 25. je uvedena taková množina míst Π; odpovídající množinu Φ tvoří silně vytažené hrany. Jiná množina míst splňující požadavek neměnného součtu značek je množina $\{p_1, p_2, p_4, p_5\}$.

Popsaný způsob určování množiny $\Pi(\Phi)$ není dostačující v případě, že Petriho síť obsahuje hrany s váhou větší než 1. Příkladem může být síť na Obr. 26., která je striktně konzervativní. Hledaná množina P obsahuje všechna místa sítě.



Obr. 25. Petriho síť ilustrující specifické podmnožiny míst

Pokusme se tedy nyní odvodit, co musí platit pro množinu míst Π v obecné Petriho síti. Má-li zůstat součet značek míst z $\Pi \subseteq P$ nezměněný při provedení libovolného přechodu $t \in T$, pak



Obr. 26. Striktně konzervativní Petriho síť

$$\sum_{p \in {}^\bullet t \cap \Pi} W(p, t) = \sum_{p \in t^\bullet \cap \Pi} W(t, p)$$

Podle Definice 13. je tato podmínka ekvivalentní podmínce

$$\sum_{p \in {}^\bullet t \cap \Pi} \underline{t}(p) = -\sum_{p \in t^\bullet \cap \Pi} \underline{t}(p), \text{ tj. } \sum_{p \in {}^\bullet t \cap \Pi} \underline{t}(p) + \sum_{p \in t^\bullet \cap \Pi} \underline{t}(p) = 0,$$

kterou lze dále upravit do tvaru:

$$\sum_{p \in ({}^\bullet t \cup t^\bullet) \cap \Pi} \underline{t}(p) = 0 \text{ a dokonce do tvaru } \sum_{p \in \Pi} \underline{t}(p) = 0$$

Nahradíme-li nyní množinu Π jejím charakteristickým vektorem c_Π, pak lze podmínku na množinu míst Π zapsat ve tvaru

$$\sum_{p\in\Pi} t(p).c_\Pi = 0, \text{ nebo vektorově } \underline{t}.c_\Pi = 0.$$

Pokud se součet značek v místech z Π nemá změnit při provedení libovolného přechodu, pak podmínka $\underline{t}.c_\Pi = 0$ musí platit pro všechny přechody $t \in T$ a tudíž musí platit

$$\underline{N}^T.c_\Pi = 0 \,,$$

kde $\underline{N}$ je matice Petriho sítě N.

Naopak, každé řešení rovnice $\underline{N}^T.x = 0$, které obsahuje pouze složky z $\{0,1\}$ je charakteristickým vektorem množiny Π, která zachovává součet značek.

Budeme se zabývat vztahem i ostatních řešení rovnice $\underline{N}^T.x = 0$ k vlastnostem určitých podmnožin míst a zavedeme třídu obecných invariantů.

Definice 23.

Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť. Vektor míst $i : P \rightarrow Z$ nazýváme *P-invariantem* Petriho sítě N, jestliže platí $\underline{N}^T.i = 0$. Jestliže $i(p) \in \{0,1\}$ pro všechna $p \in P$, pak i nazýváme *binárním P-invariantem* sítě N.

■

Lemma 2.

Nechť i_1 a i_2 jsou P-invarianty sítě N a nechť $z \in Z$. Pak i_1+i_2 a $z.i_1$ jsou také P-invarianty sítě N.

Důkaz:
Je jednoduchým cvičením z lineární algebry.

■

Na Obr. 27. jsou uvedeny všechny P-invarianty Petriho sítě z obr. 25. Invarianty i_1 a i_2 jsou binární invarianty odpovídající množinám $\{p_1, p_3, p_4\}$ a $\{p_1, p_2, p_4, p_5\}$.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	i_1	i_2	i_3	i_4
p_1	-1		-1		1	1	1	2	
p_2	1	-1					1	1	1
p_3	1			1	-1	1		1	-1
p_4			1	-1		1	1	2	
p_5		1		1	-1		1	1	1

Obr. 27. Matice a P-invarianty Petriho sítě z obr. 4.25

Zamysleme se nyní nad tím, jakou interpretaci mají nebinární invarianty; v předchozím příkladě invarianty i_3 a i_4. Jestliže pečlivě prohlédneme síť na Obr. 25. zjistíme, že jedna značka v místě p_1 odpovídá dvěma značkám v místě p_2 a p_3 dohromady a podobně značka v místě p_4 odpovídá dvěma značkám rozloženým v místě p_3 a p_5. Tedy značky míst p_1 a p_4 mají dvojnásobnou váhu jako značky míst p_2, p_3 a p_5. Uvažujme proto takto vážený součet značek. Pak pro každá dvě značení M_1 a M_2, pro která $M_1 [t\rangle M_2$, $t \in \{t_1, \dots, t_5\}$ platí

$$2M_1(p_1)+2M_1(p_4)+M_1(p_2)+M_1(p_3)+M_1(p_5)=2M_2(p_1)+2M_2(p_4)+M_2(p_2)+M_2(p_3)+M_2(p_5)$$

což vyjadřuje právě invariant i_3:

$$M_1.i_3 = M_2.i_3$$

Podobně lze z obr. 25. zjistit, že pro každé dostupné značení $M \in [M_0\rangle$ zůstává v platnosti vztah

$$M(p_3)=M(p_4)+M(p_5)$$

což je podmínka odpovídající poslednímu invariantu i_4:

$$M_0.i_4 = M.i_4$$

Koncept P-invariantů souvisí do značné míry s již zavedeným pojmem Petriho sítě konzervativní vzhledem k váhovému vektoru. Každý P-invariant může být považován za obecný váhový vektor, v němž jsou povoleny i záporné složky. Na rozdíl od pojmu konzervativnosti, který akceptoval požadavek neměnícího se počtu značek celé sítě či podsítě, je pojem P-invariantu obecnější a odráží určité podmínky systému, které by měly být zachovány.

Věnujme dále pozornost některým vlastnostem P-invariantů, které usnadní analýzu Petriho sítě.

Věta 3.

Nechť N je Petriho síť s počátečním značením M_0. Pak pro každý P-invariant i sítě N a pro každé dosažitelné značení $M \in [M_0\rangle$ platí $M.i = M_0.i$.

Důkaz:
Nechť $M_1, M_2 \in [M_0\rangle$ a nechť $t \in T$ tak, že $M_1 [t\rangle M_2$. Pak platí $M_2 = M_1+\underline{t}$ (Věta 1.) a $\underline{t}.i = 0$ (protože i je invariant). Proto $M_2.i = (M_1+\underline{t}).i = M_1.i+\underline{t}.i = M_1.i$

■

Opačná implikace platí pouze tehdy, může-li být každý přechod sítě N proveden alespoň jednou, tzn. **speciálně** platí pro živé sítě.

Věta 4.

Nechť N je živá Petriho síť a nechť $i : P \to \mathbf{Z}$ je vektor míst, pro který platí

$$\forall M \in [M_0\rangle : M.i = M_0.i \,.$$

Pak i je P-invariant.

Důkaz:
Stačí dokázat, že pro každý přechod $t \in T$ platí $\underline{t}.i = 0$. Nechť tedy $t \in T$ a $M \in [M_0\rangle$ a nechť t je M-proveditelný. Pak $M [t\rangle M'$, $M.i = M'.i = (M+\underline{t}).i = M.i+\underline{t}.i$. Tudíž $\underline{t}.i = 0$.

■

Je zřejmé, že místo, které může získat neomezený počet značek, nemůže patřit žádnému kladnému P-invariantu. Této vlastnosti lze využít pro analýzu omezenosti Petriho sítě.

Definice 24.

Petriho síť N je *pokryta P-invarianty*, jestliže pro každé místo $p \in P$ existuje kladný P-invariant i sítě N takový, že jeho složka $i(p) > 0$.

■

Věta 5.

Je-li Petriho síť N pokryta P-invarianty, pak existuje P-invariant i sítě N, pro který $i(p) > 0$ pro všechna $p \in P$.

Důkaz:
Podle předpokladu, pro každé $p \in P$ existuje invariant i_p sítě N, pro který $i(p) > 0$. Podle Lemmy 2. je $i = \sum_{p \in P} i_p$ invariant. Tento invariant splňuje podmínku $i(p) > 0$ pro všechna $p \in P$.

■

Věta 6.

Nechť N je Petriho síť s konečným počátečním značením M_0. Je-li N pokryta P-invarianty, pak je omezená.

Důkaz:
Nechť $q \in P$ je libovolné místo sítě N a i je P-invariant, pro který $i(q)>0$ a nechť $M \in [M_0\rangle$
Poněvadž

$$M(q).i(q) \leq \sum_{p \in P} M(p).i(p) = M.i = M_0.i \text{ (Věta 3.),}$$

dostáváme

$$M(q) \leq M_0 \frac{i}{i(q)} .$$

■

Opačné tvrzení k Větě 6., tj. je-li síť omezená, pak je pokryta P-invarianty, obecně neplatí.

Nyní si ukážeme, na příkladě nepříliš rozsáhlého systému, jak mohou být použity P-invarianty k ověření určitých strukturálních vlastností modelu.

Příklad 12.

Uvažujme model, který je v operačních systémech označován termínem "readers and writers". Každý z n procesů operačního systému může používat společnou vyrovnávací paměť (buffer), aby do ní určitá data zapsal nebo z ní data přečetl. Má-li být zajištěna spolehlivost operačního systému, pak je nutné přístup procesů k vyrovnávací paměti určitým způsobem řídit. Předpokládejme, že se procesy budou chovat podle těchto pravidel:

Z P-invariantu i_2 plyne pro každé značení $M \in [M_0\rangle$:

$$M(p_2) + k.M(p_4) + M(p_5) = M_0(p_2) + k.M_0(p_4) + M_0(p_5) = k$$

Tedy, p_4 obsahuje nanejvýš jednu značku, tj. vždy existuje nejvýše jeden zapisující proces. Obsahuje-li místo p_4 značku, pak $M(p_2)=M(p_5)=0$, tj. jakmile některý z procesů zapisuje, žádný proces nečte. Místo p_2 může obsahovat maximálně k značek, tj. maximálně k procesů čte simultánně z vyrovnávací paměti. Jestliže žádný z procesů nečte, $M(p_4)=0$, pak p_2 může obsahovat k značek a pak je synchronizační místo p_5 prázdné.

■

Na základě těchto faktů můžeme dokázat následující tvrzení:

Tvrzení:

Petriho síť na Obr. 28. s uvedeným počátečním značením a s kapacitami míst

$$K(p_i) = n \text{ pro } i \in \{0,1,3\},\ K(p_4) = 1 \text{ a } K(p_2) = K(p_5) = k$$

je živá.

Důkaz:

Specifikované kapacity $K(p_i)$, $i \in \{0, \dots ,5\}$, jak jsme již ukázali, neovlivní živost sítě. Prověříme dále, zda pro každé značení $M \in [M_0\rangle$ je M-proveditelný alespoň jeden přechod. V případě $M(p_0)+M(p_2)+M(p_4) > 0$ vidíme z grafu sítě, že může být proveden alespoň jeden z přechodů t_0, t_3, t_2 nebo t_5. Jestliže je $M(p_0)+M(p_2)+M(p_4) = 0$, pak z i_1 plyne $M(p_1)+M(p_3) = n$ a z i_2 plyne $M(p_5) = k$. Tedy t_1 nebo t_4 jsou proveditelné. Nyní, jestliže p_0 je prázdné pro nějaké $M \in [M_0\rangle$ pak může získat značku v následujících krocích. Z toho plyne živost přechodů t_0 a t_3. Živost ostatních přechodů pak plyne zcela zjevně.

■

4.2. T-invarianty

Nyní se budeme zabývat řešením soustavy rovnic tvaru:

$$\underline{N}x = 0$$

Předpokládejme, že vektor $u : T \to \mathrm{N}$ je takovým řešením. Jestliže je možné, počínaje určitým značením M, provést každý přechod t přesně $u(t)$-krát, pak opět získáme značení M.

Skutečně, nechť c_t je charakteristický vektor množiny $\{t\}$, $t \in T$, pak $\underline{t} = \underline{N}.c_t$. Jestliže M_0 $[t\rangle M_1$, pak $M_0+\underline{t} = M_1$ (Věta 1.). Podobně, jestliže M_0 $[t_1\rangle M_1$ $[t_2\rangle M_2$, pak $M_0+\underline{t_1}+\underline{t_2} = M_2$ a tedy $M_0+\underline{N}.c_{t_1} + \underline{N}.c_{t_2} = M_0+(c_{t_1}+c_{t_2}) = M_2$. Obecně, tudíž, pro M_0 $[t_1\rangle M_1$ $[t_2\rangle \dots [t_k\rangle M_k$ dostáváme:

$$M_n = M_0+\sum_{i=1}^{k}\underline{t_i} = M_0+\sum_{i=1}^{k}\underline{N}.c_{t_i} = M_0+\underline{N}.\sum_{i=1}^{k}c_{t_i} = M_0+\underline{N}u$$

Tento důležitý fakt vyjádříme větou :

Věta 7.

Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť a nechť $M_0, M_1, \dots, M_k \in [M_0\rangle$ a $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$, přičemž

$$M_0 [t_1\rangle M_1 [t_2\rangle \dots [t_k\rangle M_k$$

Nechť vektor $u : T \to \mathrm{N}$ je definován takto :

$$u(t) = |\{ i : t_i = t \wedge 1 \leq i \leq k\}|$$

Pak $M_0 + \underline{\mathrm{N}}.u = M_k$. ■

Opak věty 7. obecně neplatí, protože pro provedení výpočetní posloupnosti odpovídající vektoru u je třeba dostatečného počtu značek a dostatečně volné kapacity míst.

Věta 8.

Nechť N je Petriho síť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$, pro kterou $K(p) = \omega$ pro všechna $p \in P$. Nechť $M, M' : P \to \mathrm{Z}$ jsou dvě značení a nechť $u : T \to \mathrm{N}$ je vektor. Pak $M + \underline{\mathrm{N}}.u = M'$ tehdy a jen tehdy, jestliže existuje $M'' : P \to \mathrm{N}$ a přechody $t_1, \dots, t_k \in T$ takové, že $(M+M'') [t_1\rangle \dots [t_k\rangle (M'+M'')$ a pro všechna $t \in T$ je $u(t) = |\{i : t_i = t \wedge 1 \leq i \leq k\}|$.

Důkaz:

(a) " $\Leftarrow$ ":

Je tvrzením věty 7.

(b) " $\Rightarrow$ ":

Provedeme indukcí pro $j = \sum_{i=1}^{k} u(t_i)$:

Nechť $j=0$, pak $M=M'$. Dokazované tvrzení platí pro libovolné značení M'', protože $M+M''$ $[\emptyset\rangle$ $M'+M''$.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro $j-1$ a nechť $t \in T$ je přechod, pro který

$$u = u' + c_t.$$

Pak

$$\sum_{i=1}^{k} u'(t_i) = j-1.$$

Máme $M + \underline{\mathrm{N}}.u = M'$. Dále nechť $M''' = M' - \underline{t}$.

Pak

$$M + \underline{\mathrm{N}}.u' = M + \underline{\mathrm{N}}.(u - c_t) = M + \underline{\mathrm{N}}.u - \underline{\mathrm{N}}.c_t = M + \underline{\mathrm{N}}.u - \underline{t} = M' - \underline{t} = M'''.$$

Podle induktivní hypotézy existuje $k \in \mathrm{N}$, určité značení M'' a výpočetní posloupnost $t_1, \dots, t_k$ tak, že $(M+M'') [t_1\rangle \dots [t_k\rangle (M'''+M'')$, kde $u'(t) = |\{i : t_i = t \wedge 1 \leq i \leq k\}|$. Nyní nechť značení $\hat{M} : P \to \mathrm{N}$ je definováno takto:

$$\hat{M}(p) = \begin{cases} W(p, t), & \text{pro } p \in {}^{\bullet}t \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak $\hat{M}$ $[t\rangle$ $\hat{M} + \underline{t}$ a $(M+M''+\hat{M})$ $[t_1\rangle \dots [t_k\rangle (M'''+M''+\hat{M})$ $[t_{k+1}\rangle (M'''+\underline{t}+M''+\hat{M})$, $t_{k+1} = t$, protože $\forall p \in P : K(p) = \omega$. Tedy,

$$M''+\underline{t} = M' \text{ a } \forall t \in T : u(t) = |\{ i : t_i = t \wedge 1 \leq i \leq k+1\}|.$$

■

Dále se budeme zabývat vztahem mezi řešením soustavy $\underline{N}.x=0$ a vlastností nazývanou reprodukovatelnost značení.

Definice 25.

Značení M Petriho sítě N se nazývá *reprodukovatelné*, jestliže existuje $M' \neq M$ tak, že $M' \in [M\rangle$ a zároveň $M \in [M'\rangle$

■

Lemma 3.

Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť, pro kterou $\forall p \in P : K(p) = \omega$. Je-li značení M sítě N reprodukovatelné, pak je rovněž reprodukovatelné značení $M+M'$ pro libovolné značení M' sítě N.

Důkaz:
Je-li M reprodukovatelné, pak $M\ [\alpha\rangle M$ pro určitou výpočetní posloupnost $\alpha \in T^+$. Poněvadž $\forall p \in P : K(p) = \omega$, platí $M+M'\ [\alpha\rangle M+M'$ pro libovolné značení $M' : P \to \mathrm{N} \cup \{\omega\}$.

■

Definice 26.

Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť. Vektor $i : T \to \mathrm{Z}$ se nazývá *T-invariant sítě N*, jestliže $\underline{N}.i = 0$.

■

Lemma 4.

Jestliže i_1 a i_2 jsou T-invarianty Petriho sítě N a $z \in \mathrm{Z}$, pak i_1+i_2 a $z.i_1$ jsou také T-invarianty sítě N.

Důkaz:
Je analogický s důkazem lemmy 1.

■

Věta 9.

Nechť N je Petriho síť s neomezenými kapacitami všech míst. Síti N přísluší nenulový T-invariant i právě tehdy, má-li reprodukovatelné značení.

Důkaz:
$\underline{N}.i = 0 \Leftrightarrow 0 + \underline{N}.i = 0 \Leftrightarrow \exists\ t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$ a M'' takové, že $(0+M'')\ [t_1\rangle \ldots [t_k\rangle\ (0+M'')$ a $\forall t \in T : i(t) = |\{i : t_i = t \wedge 1 \leq i \leq k\}|$ (Věta 8.)

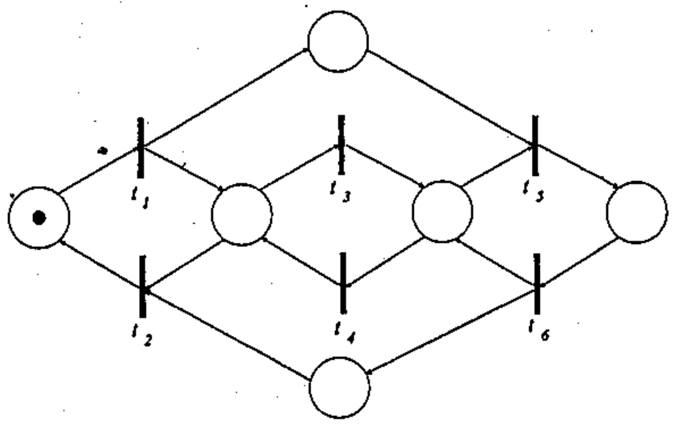
■

Definice 27.

T-invariant i Petriho sítě N se nazývá *realizovatelný*, jestliže existuje $M \in [M_0\rangle$ a výpočetní posloupnost $M\ [t_1\rangle \dots [t_k\rangle M_n$ taková, že $\forall t \in T : i(t) = |\{i : t_i = t \wedge 1 \le i \le k\}|$.

■

Ne každý kladný T-invariant i je realizovatelný. Dokonce ani nepostačuje, aby N byla živá a omezená a každé značení bylo reprodukovatelné a invariant i nebyl součtem jiných kladných T-invariantů. Na Obr. 30. je příklad takové sítě. T-invariant i definovaný zobrazením $i(t_1)=i(t_2)=i(t_5)=i(t_6)=1$ a $i(t_3)=i(t_4)=0$ není realizovatelný.



Obr. 30. Petriho síť s nerealizovatelným invariantem

Na závěr ukážeme, že živá a omezená Petriho síť je pokryta T-invarianty.

Definice 28.

Petriho síť N je pokryta T-invarianty, jestliže pro každý přechod t sítě N existuje kladný T-invariant i sítě N takový, že $i(t)>0$.

■

Věta 10.

Je-li Petriho síť N pokryta T-invarianty, pak existuje invariant i sítě N takový, že $i(t)>0$ pro všechny přechody $t \in T$.

Důkaz:

Podle Definice 28. existuje pro každý přechod $t \in T$ T-invariant i_t sítě N takový, že $i_t(t)>0$. Invariant $i = \sum_{t \in T} i_t$, získaný aplikací Lemmy 4. je hledaným T-invariantem.

■

Věta 11.

Každá živá a omezená Petriho síť je pokryta T-invarianty.