Přednášky z Teorie her (THE)
Game Theory

Martin Hrubý

Brno University of Technology
Brno
Czech Republic

September 22, 2016

Úvod - Matematická teorie her

- Vědní disciplína zkoumající racionální lidské chování při *rozhodování* (jsou i další složky/projevy inteligence).
- Multi-oborová disciplína - matematika, ekonomie, sociologie, politologie, biologie, informatika, ...
- Z mnoha důvodů je snaha chování lidí studovat, analyzovat a modelovat
- cílem je chování pochopit a predikovat (dle možností – nebudeme věštit)
  - v druhé části semestru budeme zkoumat mechanismy (a jejich návrh), které způsobí, že se racionální jedinec bude chovat tak, jak chceme my

Poznámka: Teorie her není nauka o programování počítačových her.

Z historie modelů rozhodování

Talmud(0-500AD) – návody a přikázání v obchodu, právu a běžném životě. Proslavil se zejména problém "marriage contract problem" – muž měl tři ženy, v určitém okamžiku zemřel a zanechal odkaz E. Manželky měly kontrahována pro tento případ různá dědictví (100, 200, 300).

Talmud doporučuje spravedlivé dělení v případě, že E je menší než suma kontraktů.

V případě $E = 100$ je to $(33.3, 33.3, 33.3)$, $E = 200$ pak (50,75,75), $E = 300$ pak $(50, 100, 150)$.

Až v roce 1985 se ukázalo, že řešení Talmudu odpovídá poznatkům o kooperativních hrách (nucleolus).

Brams, S. J.: The Win-Win Solution: Guaranteeing Fair Shares to Everybody, v knihovně

Z historie (poznatky, výsledky)

1713 James Waldegrave ukázal první známé řešení ve smíšených strategiích pro 2-hráčové hry (hra Le Her).

1785 Condorcetův paradox

1838 Augustin Cournot publikoval model oligopolu, který značně předstihl dobu. Odpovídá dnešnímu Nashovu ekvilibriu.

1871 V knize "The Descent of Man, and Selection in Relation to Sex" Charles Darwin publikoval první (zatím intuitivní) herně-teoretickou argumentaci pro evoluční biologii.

1913 Zermelo's Theorem

1921-27 Emile Borel – publikoval čtveřici článků o strategických hrách. Položil první formální definici smíšených strategií v minimax řešení her.

1928 John von Neumann dokázal minimax theorem v článku Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.

Z historie (poznatky, výsledky)

1930 F. Zeuthen: Problems of Monopoly and Economic Warfare. V kapitole IV naznačil řešení "bargaining problemu", které později Harsanyi ukázal ekvivalentní k Nash's bargaining solution.

1944 John von Neumann and Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior. Považována za jednu z nejvýznamnějších matematických knih 20. století.

1950 Melvin Dresher and Merrill Flood (Rand Corporation): the Prisoner's Dilemma.

1950-53 John F. Nash publikoval své řešení v nekooperativních hrách a v teorii vyjednávání (bargaining).

1952-53 L. S. Shapley (Rand Corporation): jádro v kooperativních hrách.

Pak se to značně rozjelo...

Současný stav udělených Nobelových cen za teorii her

- 1972 J.R. Hicks, K.J. Arrow
- 1994 J.C. Hersanyi, J.F. Nash, R. Selten
- 1996 J.A. Mirrlees, W. Vickrey
- 2005 R.J. Aumann, T.C. Schelling
- 2007 L. Hurwicz, E. S. Maskin, R.B. Myerson
- 2012 A. E. Roth, L. S. Shapley



Teorie her pro informatiky na FITu

- Teorie her je disciplína zapadající do *inteligentních systémů* (UI).
- Umožní nám formalizovat a modelovat specifickou část inteligence.
- V mnoha ohledech nám ulehčí pochopení lidského chování – ovšem vždy na úrovni modelů.
- PSYCHOvědy: psychologie, psychiatrie, sociologie, politologie, ekonomie jsou z pohledu informatiky soft-vědy.
  - Výjimky: experimentální ekonomie/teorie her.
- Nás zajímá matematika, modelování a simulace, algoritmizace, datové struktury, extrémně náročné výpočty, ...

Teorie her pro hráče počítačových her

Nebudeme dělat počítačové hry.

- Počítačové hry jsou bezesporu velký byznys v IT.
- Známe několik typů počítačových her (nebudeme nyní zavádět typologii).
- Hry známé jako "strategie" - tahové, real-time, ...
- V rámci těchto počítačových her rozlišujeme další pod-úlohy: grafika, simulační jádro, model prostoru (GIS), *inteligence počítačového protivníka*, ...
- Částečně do toho zasahují *Multi-agentní systémy*.

V jistém ohledu je studium THE jistou průpravou pro tento obor informatiky.

Cíl předmětu Teorie her (THE)

- Rozšířit matematické vzdělání a přemýšlení.
- Naučit se analyzovat rozhodovací situace, hledat v nich možná řešení.
- Předmět je úvodem do problematiky a má mít co možná nejširší záběr.
- Teorie her má taky své pod-obory, zkusíme projít všechny (většinu).
- Student by měl být schopen analyzovat zadanou situaci a vytvořit její matematický/počítačový model. Na základě modelu by měl být schopen poznat chování modelovaného systému, případně predikovat pravděpodobné chování hráčů.
- Výsledek studia her...

Úvod – Struktura a organizace předmětu

- Přednášky – 12 přednášek, 13. opakování.
- Projekt (nutný pro zápočet)
  - Studijní – nastudování vybrané kapitoly nad rámec přednášek, zpráva (originální, vlastní výklad problematiky).
  - Implementační – implementace zvolené metody nebo algoritmu, zpráva.
  - Aplikační – implementace konkrétního modelu, simulační studie.
  - Infiltrační – návštěva existující instituce tematicky příbuzné předmětu, zpráva.
  - Termín – viz organizace předmětu.
- Zkouška – obsah, termín (lze dohodnout).
- Konzultace, zpětná vazba (reflexe a vyjednávání).

Studijní literatura:

- Knihy ve fakultní knihovně (grant FRVŠ FR0110/2010/F1).
- Studiní texty Teorie her (pracovní stránka kurzu).

Přednášky 1/3

Jedna přednáška vždy znamená jedno téma (tzn. některé jsou informačně hustější, jiné volnější).

1. Úvod – organizace předmětu, úvod do nezbytných matematických pojmů, základy teorie rozhodování.
2. Hry v normální formě (s nenulovým součtem) – základní pojmy, modelování rozhodovacích situací, základy analýzy strategických her, základní modely oligopolu (Cournotův a Bertrandův model – analytické a simulační řešení).
3. Hry v normální formě (s nulovým součtem) – věta o Mini-maxu, sedlový bod, řešení. Lineární optimalizace.
4. Algoritmy pro řešení strategických her – algoritmy výpočtu řešení hry, věta o existenci řešení (ekvilibria) a její *důkaz*.

Cíl: modelovat strategické situace. Poznat herně-teoretickou matematiku.

Přednášky 2/3

7. Sekvenční (tahové) hry – základní pojmy, modely, řešení, Stackelbergův model oligopolu. Důvěryhodná hrozba. SPNE.
8. Kooperativní hry a vyjednávání (bargaining) – pojmy, modely, řešení. Jádro hry, Shapley value, Voting power, Nash bargaining solution.
9. Opakované hry (repeated games) – vliv opakování hry na strategické rozhodování hráčů. Opakování a kooperace. Korelované ekvilibrium – motivace, definice, aplikace a výpočet.

Cíl: jaký vliv má spolupráce na efektivnost našeho života?

Přednášky 3/3

10. Mechanism design – základní pojmy, návrh pravidel, strategická manipulace. Teorie veřejné volby (Public Choice) – volební mechanismy, Condorcetův paradox, Arrowův paradox (a další).
11. Teorie aukcí – mechanismy aukcí, návrh mechanismu aukce, modely.
12. Evoluční biologie – herní podstata naší evoluce, samoorganizace v populacích jedinců. Stejné principy jsou ovšem platné např. v modelování zatížení kom. sítí.
13. Aplikace, případové studie – aplikace v modelování energetických trhů.

Cíl: poznat, modelovat a *navrhovat pravidla* ve strategických situacích. Případová studie.

Úvod do matematických pojmů

V THE budeme formálně definovat pojmy, algoritmy a postupy.

- Diskrétní matematika.
- Algebra.
- Matematická analýza.
- Pravděpodobnost. Statistika.
- Operační výzkum.

Opakujeme a aplikujeme již získané matematické znalosti.
THE je matematika našeho života.

Úvod do matematických pojmů

- Pojem množina – matematický objekt A, pro který platí, že jsme schopni pro každý ($\forall$) objekt o jednoznačně určit, zda-li objekt o je nebo není prvkem A
  - $o \in A$, $o \notin A$
  - Množiny obvykle zapisujeme velkým písmenem.
- Množina není seznam. Každý prvek je tam pouze jednou (na rozdíl od multi-množiny).
- $A = \{a_1, a_2, ..., a_x\}$. Prázdná množina $\emptyset$.
- $|A|$ značí počet prvků množiny (kardinalita množiny). $|A| = x, x \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$.
- Definice konkrétní množiny: $B = \{a \in A | condition(a)\}$
- Podmnožina: $\subset, \subseteq$
- Potenční množina: 2^A. Kolik má prvků? Kolik je $|2^\emptyset|$?

Množinové operace

- $C = A \cup B \Leftrightarrow \forall c \in C : c \in A \vee c \in B$
- $C = A \cap B \Leftrightarrow \forall c \in C : c \in A \wedge c \in B$
- $C = A \setminus B \Leftrightarrow \forall c \in C : c \in A \wedge c \notin B$
  $C = \{c \in A | c \notin B\}$

Operátory $\cup, \cap, \sum$ budeme používat s iterační proměnnou:

$$C = \bigcup_{i \in N} fun(i)$$

$$I = \sum_{i=1}^{N} fun(i)$$

$$I = \sum_{i}^{N} fun(i)$$

Kartézský součin (angl. product), relace

- Kartézský součin (značíme $\times$ nebo $\prod$) množin A a B je množina uspořádaných dvojic $C = A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$.
- Relace – toto lidské slovo má opravdu hodně významů...
- Pro matematiku je binární relace podmnožinou kartézského součinu množin A a B (tzn. je to množina uspořádaných dvojic). Definujeme i n-ární relace $R \subseteq A \times B \times C \times ....$
- $R \subseteq A \times B$, $R \subseteq A \times A$, $R \subseteq A^2$.
- Notace: $x = (a, b)$, $x \in R$, $aRb \Leftrightarrow x \in R$.
- Různé vlastnosti relací.

Příklad:
$A = \{1, 2, 3\}; B = \{x, y\}$
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$
$R \subseteq A \times B$ např. $R = \{(1, x), (1, y)\}$

Další matematické znalosti

Bylo by dobré umět/chápat:

- Přečíst/pochopit matematický zápis.
- Úpravy algebraických výrazů (odvozování, zjednodušování).
- Vyřešení lineární, kvadratické a jednoduché diferenciální rovnice. Základní řešení soustav lineárních rovnic.
- Derivovat. Hledání extrémů funkcí.

Nová znalost (možná) bude: lineární programování.

Základní pojmy THE: model situace

- Hra – hra je strategická interakce dvou a více hráčů.
- Hráč – hráč je účastník hry.
- Strategie (akce) – varianty možného chování hráče.
- Zisk/Užitek – hráčův výnos ze hry (užitek je míra uspokojení ze zisku).
- Preference – rozlišení strategií nebo užitků.
- Racionalita hráče – základní předpoklad pro řešitelnost situace.
- Hraní hry – jakým způsobem hráči realizují své tahy.
- Řešení hry – pravděpodobný způsob a výsledek chování hráčů.

Hráč provádí rozhodovaní nad strategiemi s cílem dosáhnout *individuálního optimálního výsledku* (užitku) ve hře.

Selfish (sobecký) agent/hráč.

Hra a hráč

Hra v pojetí TH je *model* situace – tzn. je to zjednodušení reality. Realitu abstrahujeme na hráče, pravidla hry, strategie, preference, užitek a herní koncept.

- Hra má pravidla – víme, jak se hra hraje.
- Hráči mohou mít o hře různou míru informace.
- Nezkoumáme, jestli je hráč ve hře dobrovolně, jestli chce hrát, jaké má pocity.
- Všechno, co hráč ví, co zkoumá, co preferuje, všechno je obsaženo v modelu té situace (protivníci, strategie, preference, užitek, řešení hry).
- Hry proti přírodě – příroda je hráč bez strategického chování (o jeho chování nelze říct nic víc, než že svou strategii volí náhodně).

Pojmy model a simulace, opakování

- Model systému A je jiný systém B, který je mu jaksi podobný.
- Model je vždy zjednodušení reálné situace/systému.
- Modelování je *proces zdůvodněného zjednodušování* sys. A.
- Simulace je proces experimentování s modelem ($A \rightsquigarrow B$) jehož cílem je získat nové znalosti o A prostřednictvím B.

Závěr: budeme zkoumat inteligentní rozhodování lidí prostřednictvím modelů. Musíme se vyrovnat s faktem, že naše modely budou pouze zjednodušovat realitu s tou nadějí, že zdůrazní alespoň ty aktuálně relevantní aspekty.

Význam pojmu *simulace* v našem pojetí: analýza hry a predikce výsledku hry. U počítačových modelů herních situací je to opět provedení experimentu s konkrétními vstupy a konkrétním cílem.

Strategie hráče

- Hráč provádí rozhodování.
- Musí poznat své možnosti – identifikace jeho možností je součást hráčových analytických schopností a taky jeho inteligence.
  - (v realitě): Poznání těchto možností je de facto hráčovo know-how.
  - V počítačovém modelování rozhodovací situace obvykle musí modelář sám strategie určit.
- Všechny strategie hráče $i \in Q$ ve hře tvoří jeho *množinu strategií* – S_i.
- Množiny strategií hráčů jsou obecně jiné (až disjunktní, tzn. $A \cap B = \emptyset$).

Budeme zkoumat tzv. množinu strategických profilů

$$S = \prod_{i \in Q} S_i$$

Užitek a preference

Užitek:

- Užitek (angl. utility) je vztažen ke každé hráčově strategii. Na základě užitku může hráč provádět rozhodování.
- Výsledek (řešení, výstup, outcome) hry je společný užitek všech hráčů.
- Zisk a užitek (později vše sloučíme do jednoho pojmu).

Preference:

- Preference je fenomén veškerého modelování rozhodovacích situací.
- Preference není předmětem rozhodování. Je to *vstup* do modelu. Každý má jiné preference (co to znamená?).

Preference hráče nemusíme chápat, ale musíme je poznat a správně modelovat.

Incentive (stimul, pohnutka, popud, ...).

Vyjádření užitku

- Obvykle velmi dobře chápeme užitek finanční – proč??? Chápeme jasně hodnotu peněz a jsme schopni srovnávat dva různé užitky (1 CZK versus 1000 CZK).
- Užitek je (subjektivní) míra uspokojení plynoucí ze spotřeby statků.
- Ve hrách o užitku hráče rozhodují i jeho protihráči.

Přístupy:

- Kardinalistická teorie – jsme schopni vnímat velikost rozdílu mezi užitky.
- Ordinalistická teorie – nejsme schopni porovnávat užitky metrikou, ale alespoň poznáme lepší užitek.
- Zkoumáme preference na množině strategií nebo na množině možných užitků. Mnohdy je to zaměnitelné.
- Výrazné problémy s preferencí začnou až u multi-kriteriálního rozhodování.

Racionalita hráče

Racionalita je pojem, který pořádně nechápou ani zkušení herní teoretici.

- Racionalita hráče je základní předpoklad pro modelovatelnost situace (racionalita je deterministická).
- Pojem s rozsáhlým významem a množstvím definic a pohledů.
- Racionální jedinec je schopen identifikovat své cíle a podniká kroky k jejich dosažení.
- ... je schopen promyslet situaci v celé její komplexnosti (nedělá ukvapená rozhodnutí).
- ... neřídí se "citem (intuicí)", ale jeho postoje jsou matematicky zdůvodnitelné (logická reakce na vstupy a stav situace).
- Racionalitu budeme formálně definovat v Teorii volby/užitku: hráč je schopen posoudit dvě strategie.

Racionalita hráče

- Racionální jedinec maximalizuje svůj užitek.
- Racionalita mezi hráči musí být common knowledge (všichni si o sobě navzájem uvědomují, že jsou racionální a současně ví, že ví...).
- Racionalita je jistota, je to logické chování.

Firma/jedinec neřekne, že už má dost a dále neprodukuje. Pokud to přesto řekne, pak je součástí jejího užitku i jiný faktor (např. sledování kvality života šéfa a zaměstnanců). Pak je užitek vícesložkový – (tržba, pohoda).

- ... pak ovšem musíme definovat operátor preference

$Trzby = \mathbb{R}[CZK], Pohoda = \mathbb{R}[???]$
$Rozhodovani \subseteq Trzby \times Pohoda$

Klademe si otázku $\forall r_1, r_2 \in Rozhodovani$: která možnost je lepší?

Je lepší $(1000, 20)$ než $(5000, 4)$??? A co srovnání s $(20000, -10)$?

Pokud řekneme, že náš užitek je dán funkcí $u : Rozhodovani \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $1 pohoda = 100 CZK$, pak maximalizujeme funkci:

$$u(trzba, pohoda) = trzba + 100 \cdot pohoda$$

Možná podoba rozhodovací množiny *Rozhodovani* (zřejmě je ohraničená).

Preference, volba, užitek a racionalita

- Potřebujeme formalizovat vztah mezi volbou a užitkem. Formalizace=model.
- Ekonomické teorie.
- Zkoumání křivek užitku.
- Mírná skepse nad tím, zda-li to vůbec funguje.

Prozření prognostika: výsledek modelu je vždy *expertní názor* na to, jak to může fungovat. Pokud má někdo *lepší názor*, pak sem s ním...!

Teorie volby - Úvod

Čerpáno z:

1. McCarthy, N., Mierowitz, A.: Political Game Theory: An Introduction, Cambridge University Press, 2007
2. Magdaléna Hykšová: Přednášky z teorie her, Fakulta dopravní ČVUT

- Studium racionality je základem studia racionálního rozhodování.
- Naším základním předpokladem je fakt, že studujeme racionálního jedince (opakem jsou hry proti přírodě).
- Racionalitu není možno zaměňovat s nějakou formou morálky – racionální jedinec nekoná dobro, pouze sleduje svoje preference.
- Jedinec identifikuje svoje možnosti a hledá mezi nimi optimum (maximum). Musí definovat význam optima.
- Otázka: je schopen odhalit optimum?

Teorie užitku, příklady

- Pro začátek intuitivně...
- Organizujeme svatbu. Možnosti jsou:
  - v chatě (krásná chata, +1000 bodů); nebo v sále (+800 bodů).
  - Při nepříznivnivé počasí v chatě $\Rightarrow$ 0 bodů, v sále nevadí.
  - Pravděpodobnost nepříznivého počasí je 25 procent.
- Očekáváný užitek z chaty je $0.75 \cdot 1000 + 0.25 \cdot 0 = 750$.
- Očekávaný užitek ze sálu je 800, tzn. větší.
- Volím sál.

Důležité !!! Pokud po tomto zjištění stále váhám, pak to znamená, že bud' (něco je v modelu chybně):

- Jsem chybně modeloval pravděpodobnost nepříznivého počasí.
- Jsem chybně modeloval užitek při realizaci v chatě nebo sále.
- V modelu chybí nějaký další aspekt užitku (např. štěstí nevěsty, rodičů, hostů, ...).
- *Nejsem* racionálně uvažující jedinec.
- Riziko – specifický aspekt. Změna užitkové funkce.

Definice racionality

- Je-li racionální jedinec konfrontován se dvěma možnostmi x a y, pak je schopen jednoznačně rozhodnout, jestli nepreferuje x před y nebo nepreferuje y před x nebo nepreferuje ani jednu možnost.
  - Jestli možnosti splňují tuto podmínku, pak mluvíme o úplnosti.
- V kladném vyjadřování: pokud řeknu, že nepreferuju x před y, pak tím míním, že y je stejně dobrá nebo lepší možnost.
- Je-li konfrontován se třemi možnostmi x, y, z a nepreferuje-li y před x a současně nepreferuje z před y (tzn. x je asi lepší než y a y je asi lepší než z), pak nemůže preferovat z před x.
  - Jestli možnosti splňují toto, pak mluvíme o tranzitivitě.
- Úplnost a tranzitivita nás budou zajímat. Bez nich není racionálního rozhodování.

Mám A množinu alternativ. Pro všechny $a_1, a_2 \in A$ jsem schopen posoudit preferenci a dokonce i na úrovni tranzitivity. Co z toho plyne pro rozhodování?

Konečné množiny akcí (strategií, možností) a výstupů

- Jedinec volí z množiny akcí $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$.
- Předpokládáme, že jedinec má kompletní informaci (complete information) o situaci a tudíž je schopen jednoznačně predikovat následky svých akcí (jistota, certainty) – tzn. rozhodování *probíhá za jistoty*.
- Pak definujeme množinu výstupů/důsledků $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
- Z předpokladu jistoty plyne, že pro každou akci $a \in A$ je jednoznačně přiřazen právě jeden výstup $x \in X$ (zobrazení je *jednoznačné*).
- Formálně, existuje funkce

$$u : A \to X$$

- Zkoumání užitkových funkcí pro nás bude významné.

Konečné množiny akcí (strategií, možností) a výstupů

Formálně, existuje funkce $u : A \to X$.

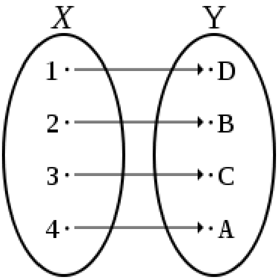
- Dále předpokládáme, že všechny prvky množiny výstupů jsou dosažitelné (feasible) – tzn., každý $x \in X$ je důsledek nějaké akce $a \in A$ (u je zobrazení *na množinu*).
- Formálně: x_i je dosažitelný, pokud $\exists a \in A : u(a) = x_i$.
- Z předpokladu dosažitelnosti a jednoznačnosti plyne, že je jedno, zkoumáme-li jedincovy preference nad akcemi nebo nad výstupy (zobrazení je vzájemně jednoznačné, bijektivní).

Co by znamenalo, kdyby pro dvě různé akce $a_1, a_2 \in A$ platilo $u(a_1) = u(a_2)$?

Demo

A	a_1	a_2	a_3
u	x_1	x_2	x_3

Říkáme tedy, že pokud je zobrazení u vzájemně jednoznačné, pak je jedno, jestli zkoumáme preference na akcích nebo na užitcích.



Rozhodování

Rozhodování je akt výběru akce $a \in A$.

- Počet zkoumaných charakteristik: mono-kriteriální rozhodování, více-kriteriální rozhodování
- Počet rozhodovatelů: jeden versus více $\Rightarrow$ rozhodování, jehož výsledek je ovlivněn alespoň dvěma racionálními účastníky (HRA)

Preference formálně

Předpokládejme, že existuje relace $R \subseteq X \times X$ (nebo $R \subseteq A \times A$) obsahující "názory" jedince na posouzení jeho možností. Zkoumáme, zda-li je jedinec schopen na základě R provést rozhodnutí (racionálně).

- Slabá preference (neostrá, weak preference) je definována binární relací R, kde $x_i R x_j$ značí, že x_j není preferováno před x_i. Říkáme tím:
  - x_i je lepší nebo stejná možnost
  - x_j není preferováno nad x_i, v nejlepším případě může být stejná, spíše horší možnost
  - připouštíme, že x_i a x_j mohou být stejně dobré.
- Analogie relace R je binární relace $\geq$ například nad čísly (pak ovšem píšeme dle zvyklostí $x_i R x_j \Leftrightarrow x_i \geq x_j$).

Striktní preference a indiference

Máme množinu alternativ A (nebo užitků X).

Pomocí R můžeme definovat dvě významné relace **striktní preference** (strict preference) a **indiference** (indifference, nerozlišitelnost).

Definition

Pro každé $x, y \in A$, xPy (x je striktně preferováno před y) právě tehdy, pokud $xRy \wedge \neg yRx$. Podobně, xIy (x je indiferentní s y) právě tehdy, pokud $xRy \wedge yRx$.

Poznámka: relace P je zaměnitelná s $>$. Podobně je I a $=$.

Říkáme: hráč strikně preferuje x nad (před) y, hráč je indiferentní mezi x a y.

Volba jedince

Notace: hvězdičkou bývá v TH označována konečná volba hráče/hráčů.

Jedinec bude zřejmě volit takovou volbu $x^* \in A$**, pro kterou** $x^* R y$ **pro všechna** $y \in A$**.**

Zkoumáme, zda-li je jedinec **schopen volby na základě relace** R. Respektive, definujeme takové vlastnosti R, aby taková volba byla možná.

Volba jedince, maximální množina

Definition

Pro relaci slabé preference R a množinu voleb A definujeme maximální množinu $M(R, A) \subseteq A$ tak, že

$$M(R, A) = \{x \in A | xRy; \forall y \in A\}$$

Jedinec bude zřejmě volit z maximální množiny. Ta by ovšem měla obsahovat alespoň jeden prvek.

Otázka: existuje taková množina $M(R, A)$? Co to může ovlivnit?

Volba jedince, maximální množina

Předpoklad: pokud je $|M(R, A)| > 1$, pak jedinec volí jednu z $M(R, A)$ náhodně, protože je indiferentní mezi shodnými alternativami, tzn. $\forall x_1, x_2 \in M(R, A) : x_1 I x_2$

Pokud jedinec nesouhlasí s výše uvedeným postojem, pak je buď chybná jeho preference nebo jedinec není racionální.

Zjištění maximální množiny zřejmě nebude možné, pokud pro nějaká dvě $x, y \in A$ neplatí ani xRy ani yRx (narušení úplnosti).

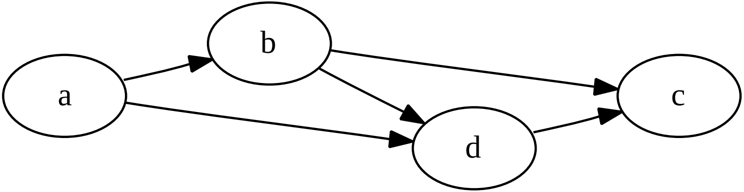
Nezávislost na irelevantních alternativách

Později budeme navíc vyžadovat, aby jedincova preference byla nezávislá na irelevantních alternativách (např. v Teorii veřejné volby).

Definition

Mějme množinu alternativ $A = \{a, b\}$ a preferenci R na A. Předpokládejme, že aRb. Pokud chceme zachovat nezávislost na irelevantních alternativách, tak přidání alternativy c do A nesmí změnit preferenci mezi a a b (tzn. aRb).

Mějme množinu užitků $A = \{a, b, c, d\}$. Relaci slabé preference R zobrazíme graficky:



Je relace úplná?
$M(R, A) = \{a\}$, protože pouze pro a platí $aRy; \forall y \in A$.
Pozn.: předpokládáme, že $xRx; \forall x \in A$ platí automaticky.

Pomocné definice

Definition

Binární relace R na X (tzn. $R \subseteq X^2$) je:

1. úplná, pokud $\forall x, y \in X, x \neq y : xRy \vee yRx$.
2. reflexivní, pokud $\forall x \in X : xRx$.
3. tranzitivní, pokud $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \ \ \forall x, y, z \in X$.
4. kvazi-tranzitivní (definováno nad relací P), pokud $xPy \wedge yPz \Rightarrow xPz \ \ \forall x, y, z \in X$ (pomocí R je ekvivalentní se zápisem $xRy \wedge \neg(yRx) \wedge yRz \wedge \neg(zRy) \Rightarrow xRz \wedge \neg(zRx)$).
5. anti-symetrická, pokud xRy a yRx značí $x = y$ (jsou totožné)
6. asymetrická, pokud xRy pak neplatí yRx

Poznámka: úplnost vyjadřuje schopnost jedince *mít názor* na preferenci nad každými dvěma akcemi (se zachováním tranzitivity). *Musíme s tímto počítat i přesto, že mnoho ekonomů a psychologů o této schopnosti člověka v některých situacích pochybuje.*

Demo; paradox

Příklad: mějme množinu $X = \{b_1, ..., b_{1000}\}$ tisíce různých lahví piva definovanou takto: b_1 je lahev, kde jedna kapka piva byla nahrazena kapkou vody, b_2 dvě kapky až b_{1000} tisíc kapek.

Jistě by každý prohlásil, že $b_1 I b_2$, $b_2 I b_3$, ..., $b_{999} I b_{1000}$ (je mi jedno, jestli zvolím lahev ředěnou 999 kapkami vody nebo 1000 kapkami).

Protože xIy implikuje xRy (z definice), pak musí platit i $b_{1000} R b_{999}, ..., b_2 R b_1$.

Pokud akceptujeme tranzitivitu, pak $b_{1000} R b_1$. Vedle toho ovšem $b_1 P b_{1000}$. Kde se stala chyba?

Úplné neostré uspořádání

Definition

Mějme množinu voleb A. Úplné neostré uspořádání na množině A je binární relace $R \subseteq A \times A$, která je úplná, reflexivní a tranzitivní.

Poznámka: Anti-symetrii zde nezavádíme (by nám narušovala indiferenci). Proč reflexivita?

Theorem

Je-li A konečná množina a R úplné neostré uspořádání, pak $M(R, A) \neq \emptyset$.

Máme garanci, že pokud je preference definována *správně (pořádně)* a množina alternativ je konečná, pak existuje zvolitelné optimum.

Důkaz věty o existenci maxima na množině alternativ 1/3

Nechť A je konečná množina a R je úplná, reflexivní a tranzitivní relace. Důkaz bude proveden matematickou indukcí.
Připomeňme:

$$M(R, A) = \{x \in A | xRy; \forall y \in A\}$$

Krok 1: Je-li A jednoprvková množina, tedy $A = \{a\}$, pak z reflexivity plyne aRa a proto $M(R, A) = \{a\}$.

Krok 2: Ukážeme, že je-li tvrzení pravdivé pro A' s n prvky a relaci R' na A', pak musí být pravdivé i pro libovolnou A s $n + 1$ prvky a uspořádání R.

tzn. přidáním alternativy se podmínky preference nenaruší

Důkaz věty o existenci maxima na množině alternativ 2/3

Důkaz kroku 2: Budeme pracovat s množinami A a A', kde

$$A = A' \cup \{a\}$$

Na množinách A a A' jsou definována uspořádání R a R' tak, že R' je R omezená na A', tedy

$$R' = R \cap (A' \times A')$$

Dle našich předpokladů (a dle postupu matematické indukce) je

$$M(R', A') \neq \emptyset$$

Pak z předpokladů úplnosti preferenční relace plyne, že pro libovolné $y \in M(R', A')$ platí buď yRa nebo aRy nebo platí oboje. Budeme proto zkoumat dvě varianty preferencí y a nově přidané alternativy a.

$$A = A' \cup \{a\}$$

$\forall y \in M(R', A')$ platí buď yRa nebo aRy nebo platí oboje.

1. Platí yRa neboli prvky maxima na A' jsou preferovány nad novým prvkem a. Pak tedy yRz pro všecny $z \in A' \cup \{a\}$ (z definice maximální množiny) a proto $y \in M(R, A)$. A tím dokazujeme krok 2.
2. Platí aRy. Pokud tedy $y \in M(R', A')$, pak yRz pro libovolné $z \in A'$. Vycházíme z aRy a víme, že yRz pro všechny $z \in A'$. Z tranzitivity R plyne aRz pro všechny $z \in A'$. Obecně to implikuje aRw pro všechny $w \in A'$ a proto $a \in M(R, A)$ a to opět dokazuje krok 2.

Principem matematické indukce jsme dokázali tuto větu pomocí kroků 1 a 2. **Q.E.D.**

Rozhodování s nekonečnou množinou alternativ

Mějme vybrat optimum z množiny $X = (0, 1)$ s relací preference R takovou, že $xRy \Leftrightarrow x \geq y$. Množina $M(\geq, X)$ je pak prázdná. Tzn, nikdy nebude existovat $x^* \in X$ takové, že $x^*Ry \quad \forall y \in X$.

- Definujeme nezbytné vlastnosti množiny alternativ.
- ...pak vlastnosti relace preference.
- Položíme novou definici $M(R, X)$ pro spojité množiny alternativ.

Teorie užitku

Zkoumání volby provádíme na užitkové funkci s číselným výstupem $u : A \to \mathbb{R}$.

- Můžeme plně využít zvyklostí s operátorem $\geq$ (naše preference).
- $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow xRy$
- $u(x) > u(y) \Leftrightarrow xPy$
- $u(x) = u(y) \Leftrightarrow xIy$

Stále můžeme rozlišovat kardinalistický (chápeme velikost rozdílu mezi $u(x) - u(y), xPy$) a ordinalistický přístup k užitku (pouze chápeme preferenci).
V mnoha algoritmech TH ani nepotřebujeme znát *míru preference* x nad y (uvidíme např. v definici best-response, dominance).

Definice funkce užitku

Definition

Mějme A a $R \subseteq A^2$. Řekneme, že užitková funkce $u : A \to \mathbb{R}^1$ reprezentuje R, jestliže pro všechna $x, y \in A, u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow xRy$.

Snadno jsme schopni definovat $>$ a $=$.

Rozhodovatel-maximalista pak volí z množiny

$$M(R, A) = arg \ \max_{x \in A}[u(x)]$$

Poznámka: ve hrách tomu začneme říkat Best-response.

Rozhodování bez jistoty

- Rozhodování za rizika: výsledková funkce přiřazuje každému rozhodnutí pravděpodobnostní rozložení na množině výsledků.
- Rozhodování za neurčitosti: $u : A \to 2^X$ (Pravděpodobnostní rozložení ovšem není známé nebo je nezjistitelné).
- Postoj k riziku: risk-neutral, risk-averse, risk-seeking.

Očekávaný užitek.

Rozhodování za nejistoty: Příklad s investorem

Investor přemýšlí, kam umístit svůj kapitál. Tři alternativy:

1. Zakoupit cenné papíry, které s absolutní jistotou nesou 5.5% zisk.
2. Zakoupit akcie, které ponesou:
   - 3% s pravděpodobností $\frac{1}{3}$.
   - 6% s pravděpodobností $\frac{1}{3}$.
   - 9% s pravděpodobností $\frac{1}{3}$.
3. Zakoupit akcie, které ponesou:
   - 4% s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.
   - 8% s pravděpodobností $\frac{1}{2}$.

Z hlediska rozhodování musí počítat s určitou nejistotou, kterou zde pojmenováváme *loterie*. Jeho tři alternativy jsou tři loterie.

Loterie je volba jako ji známe z teorie volby. Definujeme relaci preference a další pojmy. Více v "Axiomatické teorii užitku".

Očekávaný užitek (Expected Utility/Payoff): St. Petersbourg paradox

St. Petersbourg paradox (D. Bernoulli, 1738): mějme hru, kde účastník zaplatí vstupní poplatek c a pak háže mincí tak dlouho, dokud nepadne hlava. Protistrana souhlasí, že mu zaplatí 1 dukát, pokud padne v prvním hodu, 2 dukáty v druhém hodu, 4 v třetím hodu, atd.
Očekávaný zisk hráče tedy musí být:

$$E = (-c) + \frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}4 + \frac{1}{16}8 + \ldots + = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Problém je, že s tímto většina reálných lidí nesouhlasí a za svou účast by nezaplatili více než 20 dukátů, resp. radostně by prodali svou účast ve hře za 20 dukátů.

Užitek

St. Petersbourg paradox vyvolal diskuzi, jaký je vlastně užitek z přijetí nějakého (např. finančního) vstupu.
Gabriel Cramer (v komunikaci s D. Bernoullim): lidé hodnotí částky podle užitku, který jim přinesou.
Předpoklad: jakákoliv částka přesahující 2^{24} dukátů člověku připadá stejná jako 2^{24} dukátů.
Pak je očekávaný užitek hry:

$$\frac{1}{2}1 + \frac{1}{4}2 + \frac{1}{8}4 + ... + \frac{1}{2^{24}}2^{23} + \frac{1}{2^{25}}2^{24} + \frac{1}{2^{26}}2^{24} + ... + =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = 12 + 1 = 13$$

Potom je realisticky očekávaný užitek ze hry 13 dukátů.

Log utility

Počet jednotek užitku $u(x)$ z vlastnictví částky x. Při navýšení majetku z x na $x + dx$ je přírustek užitku $du(x)$ přímo úměrný přírustku dx a nepřímo úměrný dosavadnímu majetku x (α je počáteční majetek, $b \in \mathbb{R}^+$ je nějaký koeficient vnímání přírustku).

$$du(x) = \frac{b\ dx}{x}$$

$$u(x) = b \ln x + c; c \in \mathbb{R}$$

$$u(x) = b \ln x - b \ln \alpha = b \ln \frac{x}{\alpha}$$

obecně: užitek je ln(po akci) – ln(před akcí).

Log utility ve St. Petersbourg paradoxu

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} b \ln \frac{\alpha + 2^{n-1}}{\alpha} =$$

$$= b \ln [(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} (\alpha+4)^{\frac{1}{8}} ...] - b \ln \alpha$$

Částka D, jejíž přidání k počátečnímu majetku přinese stejný užitek:

$$b \ln \frac{\alpha + D}{\alpha} = b \ln \left[(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} (\alpha+4)^{\frac{1}{8}} ... \right] - b \ln \alpha$$

z toho plyne, že takové D je:

$$D = \left[(\alpha+1)^{\frac{1}{2}} (\alpha+2)^{\frac{1}{4}} (\alpha+4)^{\frac{1}{8}} ... \right] - \alpha$$

Pro nulové $\alpha = 0$ počáteční jmění je $D = \sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdots = 2$. Mít nulový počáteční majetek, tak nezaplatím za učast ve hře víc než dva dukáty.

Příště

- Definice strategických her, resp. her ve strategickém tvaru.
- Interakce dvou a více jedinců při rozhodování.
- Zkoumání jejich užitku budeme provádět kardinalisticky na základě užitkových funkcí.
- Preference se pak budou budovat nad strategiemi v kontextu možných tahů protihráčů (budeme mluvit o dominantnosti strategií).
- Zavedeme koncept ekvilibria ve hře.

Funguje Teorie her?