THE: Teorie aukcí
Auction Theory

Martin Hrubý

Brno University of Technology
Brno
Czech Republic

November 23, 2010

Úvod

Čerpáno z:

- Krishna, V.: Auction theory, Elsevier
- Nisan et al.: Algorithmic Game Theory
- Klemperer, P.: Auctions: Theory and Practice
- Shubik, M.: Game Theory in the Social Sciences, Vol. 1: Concepts and Solutions

Co je aukce?

- Aukce (též dražba) je ekonomický mechanismus prodeje hmotného/nehmotného statku.
- Je to forma trhu, kde se soustřeďuje nabídka a poptávka po konkrétním druhu zboží typicky mezi malým počtem prodávajících a větším počtem kupujících.
- Je to způsob, jak prodat věc, u které nechci stanovit její cenu (např. proto, že ji neznám nebo chci využít odlišného chápání hodnoty věci mezi prodávajícím a kupujícím).
- Aukce nejsou jenom dražby historických předmětů nebo kuriozit, mají aplikaci v každodenním praktickém obchodě.
- E-bay aukce (Internet, electronic market design).

Aukce o dolar (jeden)

Předmětem aukce je jeden USD. Kdo za něj nabídne nejvíc, ten dolar vyhraje a zaplatí svou nabídku. Vyvolávací cena je jeden cent.

Předpokládáme, že se aukce dostane do stavu, kdy je nabízeno 99 centů (poslední racionálně míněná nabídka) a možná 100 centů (chci vyhrát za každou cenu, cena vítězství je vyšší než jeden USD).

Hodnotu 1 USD každý zná. V aukcích ovšem prodáváme předměty, u kterých jejich hodnota není implicitně jasná.

Proč nás mají aukce zajímat?

- Aukce jsou součást ekonomiky světa.
- Obchodníci prodávají svoje zboží, vlády licence (3G sítě) a lidé svoje předměty.
- Aukce jsou ukázkou strategického chování hráčů (kupující, prodávající) – my studujeme jejich matematické modely.
- Můžeme stát na straně prodávajícího (který se rozhoduje nad formulací mechanismu, aby maximalizoval svůj užitek) nebo kupujícího (který se snaží v rámci mechanismu maximalizovat svůj užitek).
- Chceme-li modelovat tyto situace, poznejme příslušnou Teorii aukcí.

Co je užitek z aukce

- Prodávající maximalizuje výnos z aukce – nestanovuje ovšem cenu (vyvolávací cena), ale hledá mechanismus, který donutí kupující k maximálním sázkám. **Volba mechanismu je pro něj strategií ve hře.**
- Kupující i si soukromě (tajně) cení předmět aukce na částku x_i. Pokud za věc zaplatí y_i, pak **je rozdíl (nejlépe kladný)** $u_i = x_i - y_i$ **jeho ziskem z aukce**.
- Důležitý fakt: **cílem kupujícího není získat předmět aukce, ale maximalizovat svůj zisk.**
- Pokud kupující zaplatí $y_i = x_i$ a přesto má pocit kladného zisku (přínosu), pak evidentně předmět aukce chybně ocenil.
  - Podobně naopak (není neobvyklé, Winner's curse).
- Tajné ocenění předmětu kupujícím je fenomén aukcí a současně základní stavební kámen mechanism designu.

Tajné ocenění hodnoty předmětu aukce

- Prodávající neočekává, že by za věc dostal víc než je $\max_{i \in Q}[x_i]$ (obecně vzato).
- Z toho plyne, že jeho hlavním zájmem je zjistit hodnoty x_i hráčů.
- Toto ovšem zajímá i samotné hráče – pokud hráči zjistí x_i svých protihráčů, pak mohou strategicky ovlivnit své sázky.

Jak se bude chovat hráč v těchto dvou situacích:

- Vyhraje nejvyšší nabídka, ale nic se neplatí. Logicky pak hráč vsadí $x_i' >> x_i$ libovolně vysoké.
- Vyhraje nejvyšší nabídka, ale něco se zaplatí – y. Hráč se tedy bude snažit maximalizovat $x_i - y$. Zřejmě nevsadí částku větší než x_i.

Tajné ocenění hodnoty předmětu aukce

Notace:

- x_i – **tajné** ocenění předmětu aukce kupujícím $i \in Q$.
- b_i – sázka (nabídka, angl. bid) podaná kupujícím v aukci (množina všech možných sázek je jeho množinou strategií).
- y_i – částka, kterou zaplatí hráč (účastník aukce) na konci aukce (existují mechanismy, kdy obecně platí každý).

Tajné ocenění hodnoty předmětu aukce

Tajné ocenění předmětu aukce je privátní informací ve hře (hrajeme hru s neúplnou informací). Hráči si modelují názor na x_i protivníků pravděpodobnostním rozložením – distribuční funkcí

$$F(x) : \langle 0, \omega \rangle \to \langle 0, 1 \rangle$$

Zkoumají pak složenou distribuční funkci

$$G(x) \equiv F(x)^{N-1}$$

My nebudeme chtít zabřednout do analýzy spojitých distribučních funkcí a pravděpodobností. Ukážeme si pouze výsledná ekvilibria.

Bude pro nás důležité, že hráči jsou symetričtí ve svém názoru na ohodnocení (řídí se u všech stejným rozložením). Povede to na symetrická ekvilibria.

Winner's curse

- Vítězem se obvykle stává hráč s nejvyšší nabídkou (standardní aukce). Úměrně tomu i zaplatí.
- Zatím bez znalosti modelů aukcí.
- Předpokládáme, že $b_i \leq x_i$. Klíčové bude správně určit x_i.
- Mnohdy se stane, že hráč vyhraje, ale pak není rád (příliš mnoho zaplatí, předmět se ukáže méně hodnotný, ...).
- Ocenění ropných vrtů, licencí na provozování (např. sítí), ocenění akcií, ...

Pozn.: velmi slavná je situace aukčního prodeje licencí na provozování 3G-mobilních sítí. Většinu evropských telefonních operátorů tato aukce téměř ekonomicky zlikvidovala [Klemperer].

Aukce o 3G licence v Evropských zemích [Klemperer]

Výnos z aukce vyjádřený v eurech na hlavu (občana).

	rok 2000		rok 2001
Rakousko	100	Belgie	45
Německo	615	Dánsko	95
Itálie	240	Řecko	45
Holandsko	170		
Švýcarsko	20		
Velká Británie	650		

Švýcarsko: zvolilo anglickou aukci (inspirace z výsledků UK), na počátku bylo 9 zainteresovaných kupujících a v prodeji 4 licence. Po výsledku aukce v Itálii ovšem slabší hráči odpadli a zůstali 4 hráči (na 4 licence!!!). Nakonec se ukázalo, že příslušné ministerstvo nasadilo velmi nízkou "reserve price" (minimální výslednou hodnotu), takže hráči fakticky mohli utvořit koalici a zařídit se dle známých teorií.

Co jsou pravidla aukce?

V čem spočívá ten *mechanismus*?

Tvůrce aukce specifikuje pravidla týkající se:

- Způsobu podávání nabídek (sázek) – jedna sázka (obálková metoda, angl. sealed-bid auction), postupné přihazování.
- Způsobu interakce mezi hráči – věřejně nebo tajně podávané nabídky.
- Způsobu volby vítěze aukce – např. hráč s nejvyšší nabídkou (pokud je nabídka pouze jednorozměrná).
- Způsobu zaplacení za účast v aukci – vstupní poplatek, platba za výsledek aukce.
- Probereme základní mechanismy intuitivně, pak Revenue Equivalence Theorem a VCG-mechanismus.

Tradiční aukční principy – Anglická aukce (ascending auction)

- Asi nejznámější forma aukce.
- Hráči se sejdou na veřejném místě, kde proběhne aukce.
- Prodávající stanoví vyvolávací cenu.
- Hráči cenu potvrdí svým zájmem, případně sekvenčně cenu navyšují. Nabídky podávají veřejně.
- Hráč i s podanou nejvyšší nabídkou x_i^m se stane vítězem aukce.
- Vítěz aukce i zaplatí x_i^m. Ostatní neplatí nic.

Zřejmě nejoblíbenější mechanismus veřejné aukce. Je považován za nejférovější. Ukážeme si, že (teoreticky) nevede k maximálnímu výnosu z aukce.

Všimněme si, že každý hráč může přihodit libovolně malé Δ, aby navýšil předchozí nabídku. Vyplyne z toho, že **vítěz platí cenu, která se fakticky rovná druhé nejvyšší nabídce**.

Anglická aukce - platba

Vítěz aukce:

$$i^* = arg \max_{i \in Q}[b_i]$$

Platba hráčů za účast v aukci:

$$y_i = \begin{cases} b_i & i = i^* \\ 0 & jinak \end{cases}$$

Zisk hráče z aukce:

$$u_i = \begin{cases} x_i - b_i & i = i^* \\ 0 & jinak \end{cases}$$

Výnos z aukce:

$$u^* = b_{i^*}$$

Anglická aukce v podání E-bay

- Hráč stanoví svou pracovní maximální nabídku b_i^m.
- Aukční arbitr (robot) nastavuje automaticky stav aktuální nejvyšší nabídky b^M s příchodem nové nabídky
  - b^M je druhá nejvyšší nabídka plus Δ.
  - Postupným přihazováním pouze zjistím dočasně nejvyšší předchozí nabídku protihráče.
- Aukce končí vypršením časového limitu s výslednou cenou b^M. Zřejmě vítěz aukce nastavil $b_i^m > b^M$.
- Vítěz tedy platí druhou nejvyšší cenu. Je to elektronická forma anglické aukce.
- Rozšiřující atributy: reserve price (je tajná až do okamžiku jejího překročení (?)).

Racionální chování v e-bay aukci: zvolte si opravdové (naprosto pravdivé a realistické) vaše ocenění zboží x_i, nastavte $b_i^m := x_i$ a dál se na aukci raději nedívejte.

Holandská aukce (descending auction)

- Byla zavedena na trzích s květinami (používáno u "spěchajících" komodit – např. ryby).
- Prodávající ohlásí vyvolávací (počáteční) cenu b^0. Nechť $k = 0, 1, \ldots$ označuje aktuální kolo aukce.
- Pokud existuje kupující, který za tuto cenu b^k chce koupit (stane se vítězem), aukce končí a kupující zaplatí b^k.
- Jinak prodávající sníží cenu b^k o Δ a v dalším kole ohlásí cenu $b^{k+1} = b^k - \Delta$.

Tato aukce je velmi účinná.

Otázka: bude kupující reagovat v kole k, kdy $b^k \approx x_i$? Co by tím získal? Hráči zřejmě nechají cenu "vhodně" klesnout pod x_i.

All-pay auction

- Hráči vsadí svoje sázky b_i.
- Vítězí klasicky nejvyšší sázka $\max_i[b_i]$.
- Každý ovšem zaplatí svou sázku $y_i = b_i$.
- Modeluje často reklamu, lobbying, předvolební kampaně (vše s charakterem Věžňova dilematu).
- Racionální chování v této aukci: pokud se do aukce dám, pak je pro mě racionální vsadit absolutní maximum $b_i = x_i$.
- Důkaz [Krishna, p.32]

Je tu jistá podobnost s "Shubikovou aukcí o dolar" (model investování do něčeho). Hráči nejsou schopni odhalit okamžik, kdy je lépe přiznat ztrátu a odstoupit z aukce.

Pozn.: Obskurní formy "aukcí" – bonus.cz

Základní formy aukcí

- Veřejná vzestupná dražba – anglická aukce.
- Veřejná sestupná dražba – holandská aukce.
- Tajná dražba s první cenou (First-Price Sealed-bid Auction).
- Tajná dražba s druhou cenou (Second-Price Sealed-bid Auction).

Jsou některé z nich strategicky ekvivalentní (z pohledu kupujícího)?

Theorem

Veřejná sestupná dražba (holandská aukce) je ryze strategicky ekvivalentní s tajnou dražbou s první cenou.
Veřejná vzestupná dražba (anglická aukce) je slabě strategicky ekvivalentí s tajnou dražbou s druhou cenou.

Důkazy vyplynou z další slajdů.

Ekvilibrium v základních aukcích

- Veřejné aukce nás nyní strategicky nezajímají (anglická vůbec ne, holandská v podání tajné s 1st cenou).
- Známe (předpokládáme) strategickou ekvivalenci mezi veřejnými a tajnými aukcemi.
- Ukážeme si ekvilibrium (tzn. Nashovo) v tajných aukcích (first-price, second-price).
- Strategicky jednodušší je second-price aukce.
  - Ukážeme, že je strategicky nemanipulovatelná (Vickrey).
  - Ukážeme, že hráči nemusí zkoumat tajné ohodnocení x_i svých protihráčů
  - Ukážeme, že má nejvyšší výnos (až na revenue-equivalence theorem).
  - Je základem multi-object aukcí s marginální cenou (market-clearing price).

Formalizace aukce

Definition

Aukce s jedním nedělitelným předmětem koupě je strategická situace s N hráči (množina hráčů Q), kde každý hráč má pro předmět aukce své tajné privátní ohodnocení x_i. Mechanismus aukce specifikuje volbu vítěze aukce i^* a částku, kterou každý hráč musí zaplatit y_i.

Za standardní aukci považujeme aukci, kde vítězem je hráč s nejvyšší podanou nabídkou (a hráč s nulovou sázkou platí 0).

Z pohledu Mechanism design je volba vítěze (a platby hráčů) mechanismem specifikovaným Funkcí veřejní volby (social choice function).

Tajná aukce s druhou cenou (Vickrey auction)

Hráč se stane vítězem, pokud nabídne nejvyšší cenu.

Definition

Nechť je vítězem aukce hráč i s nejvyšší deklarovanou cenou b_i a nechť zaplatí druhou nejvyšší deklarovanou cenu

$$y^* = \max_{j \in Q \setminus \{i\}} [b_j]$$

Deklarovaná cena: $b_i = x_i$.

Tajná aukce s druhou cenou

Theorem

Pro každou sázku $b_1, b_2, ..., b_N$ a každou jinou b'_i, nechť u_i je užitek i-tého hráče při hraní b_i a u'_i je jeho užitek při hraní b'_i. Pak $u_i \geq u'_i$.

William Vickrey (1960)

William Vickrey – Nobelova cena (1996).

Hráč je tedy na tom slabě lépe, pokud sází své pravdivé ohodnocení předmětu aukce.

Důkaz Vickreyova teorému

Proof.
Předpokládejme, že hráč i při své sázce b_i vyhraje a zaplatí (druhou nejvyšší) cenu y^*. Jeho zisk je tedy $u_i = b_i - y^* \geq 0$. Při možné manipulaci $b'_i > y^*$, i je stále vítězícím hráčem a $u'_i = u_i$. V druhém případě, kdy $b'_i < y^*$, i prohraje a $u' = 0 \leq u$.

Pokud hráč i při sázce b_i prohraje, pak $u_i = 0$. Pak je vítěz $j \in Q; j \neq i$ se sázkou $b_j \geq b_i$ (nebo lépe $b_j > b_i$). Pro $b'_i < b_j$ hráč i stále prohrává a $u'_i = 0$. Pro $b'_i \geq b_j$ (nebo striktně vyšší), i vyhrává a platí $y^* = b_j$, ale jeho zisk je $u'_i = b_i - b_j \leq 0$, tzn. $u'_i \leq u_i$. $\square$

Historicky první sealed-bid 2nd price aukce

Korespondenční aukce známek, 1893, Wainwright & Lewis, of Northampton, Massachusetts (citováno z David Lucking-Reiley: Vickrey Auctions in Practice: From Nineteenth Century Philately to Twenty-first Century E-commerce).

Catalogue of a Collection of U.S. and Foreign Stamps To be sold WITHOUT RESERVE except where noted. Bids will be received up to 4 P.M., May 15, 1893. Bids are for the LOT, and, contrary to the usual custom in sales of this kind, we shall make this a genuine AUCTION sale; that is to say, each lot will be sold at an advance of from 1c to 10c above the second highest bidder. Address all bids to Wainwright & Lewis, Northampton, Mass.

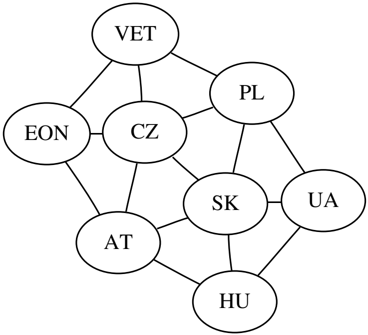
Výběrová řízení na dodávku ...

- Výběrová řízení (klient, dodavatelé) jsou také aukce – např. pohotovost v točivých rezervách (ČEPS).
- Běžně nebývá pak kontraktovaná cena dodržena (stavby).
- Modelem toho může být aukční mechanismus demonstrovaný M. Shubikem (dollar auction, 1971, Journal of Conflict Resolution).
- Předpokládejme aukci, kdy vítěz zaplatí svou cenu, ale svou nabídnutou cenu zaplatí i hráč na druhém místě.
- Jak by potom dopadla "dollar auction"? Při reálném experimentu [Shubik] byl dolar vydražen za 3.xx dolary.
  - Shubikova aukce modeluje "přeplacení" u investorských projektů (stavby, vývoj Concorde)
  - Současně je vysvětlením mnoha společensko/psychologických jevů, kde se účastník aukce stane "zainteresovaným" a nutí ho to dále investovat (sledování TV pořadů).

Multi-Object aukce

- Předpokládejme *n* kusů (kapacity) zboží v aukci.
- Hráči podávají nabídky ve formátu (množství, cena)
- Nabídky jsou seřazeny sestupně podle ceny a jsou zobchodovány až do kapacity *n*.
- Kolik vítězní hráči zaplatí? Svoji cenu nebo jednotnou (marginální, market-clearing price) cenu.
- Aukce s marginální cenou je multi-object varianta Vickreyovy aukce (2nd price, po zobecnění VCG mechanismus).
- Běžně aukce na dodávku elektřiny, nákup přeshraničních profilů (hráči tvořící marginální cenu, hráči sázející limitní cenu).
    - Na těchto trzích probíhá už opravdový "gambling".

Příklad komplikovanější aukce – FlowBased-aukční mechanismus



- Předpokládejme aukci o přeshraniční elektrické vedení mezi dvěma zeměmi $t_f \rightarrow t_t$.
- Předpokládejme fyzikální zákony toku elektřiny v obvodu.
- Je zaveden centralizovaný aukční systém na přidělování přenosové kapacity.

Energetické trhy – FB-aukce

Hráči dávají své sázky ve formátu (t_f, t_t, a_r, p), kde a_r je požadovaná kapacita a p je nabídka platby za jednotku kapacity.

Všechny sázky jsou koncentrovány v jednom okamžiku do *Bids*. Aukční autorita vybere takové sázky, aby maximalizovala

$$Z = \sum_{b \in Bids} a_r^b \cdot p^b$$

při technických omezeních sítě (opět LP-úloha):

$$\forall (f,t) \in T \times T : \sum_{b \in Bids} a_r^b \cdot PTDF_{t_f^b, t_t^b}(f,t) \leq Cap(f,t)$$

Jakého typu je tato aukce? Jaké bude obecné chování hráčů (lze očekávat, že budou risk-averse)?

Kdo je vítěz v multi-object aukci (např. FB-aukci)?

Stále je to implementace Social Choice Function, kde je výsledkem mechanismu jedna alternativa $a \in A$, která je z hlediska mechanismu optimální (přináší max. užitek).

Proto je množina A:
$A = 2^{Bids}$, kde prvek $a \in A$ je množina přijatých nabídek ($a \subseteq Bids$).

Ekvilibrium v aukci s první cenou

Tajná aukce s první cenou (nebo ekvivalentní Holandská veřejná aukce) je strategicky náročnější než Vickreyovské mechanismy.

Hráč zřejmě nebude sázet $b_i = x_i$, protože by nikdy nedosáhl $u_i > 0$. Nejspíš bude jeho sázka záviset na odhadu ocenění x_j jeho protivníky.

Předpokládáme: Hráči oceňují věc v intervalu $\langle 0, \omega \rangle$. Ohodnocení věci hráči je dáno distribuční funkcí F na intervalu $\langle 0, \omega \rangle$. Předpokládáme symetrii mezi hráči, tzn. F je pro všechny hráče stejná a F je common knowledge.

Ekvilibrium v aukci s první cenou

Theorem

Mějme N nezávislých hráčů s privátním ohodnocením x_i, které je rovnoměrně distribuováno na $\langle 0, \omega \rangle$. Pak je symetrickým Nashovým ekvilibriem hrát:

$$\beta^I(x) = \frac{N-1}{N}x$$

Důkaz [Krishna] (projekty).

Toto symetrické Nashovo eq. předpokládá risk-neutral hráče (to zatím nezkoumáme).

Příklad: Ekvilibrium v aukci s první cenou

Předpokládejme tajné symetrické ohodnocení předmětu rovnoměrným pravděpodobnostním rozložením na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Pokud je mé ohodnocení např. $x_1 = 0.8$ a $N = 2$, pak je můj očekávaný zisk dán:

b_1	π_1 = pravděpodobnost výhry $*u_1$
0.8	0.8*0
0.7	0.7*0.1=0.07
0.6	0.6*0.2=0.12
0.5	0.5*0.3=0.15
0.4	0.4*0.4=0.16
0.3	0.3*0.5=0.15
0.2	0.2*0.6=0.12

Ekvilibrium v aukci s první cenou II.

Theorem

Mějme N nezávislých hráčů s privátním ohodnocením x_i, které je exponenciálně distribuováno na $\langle 0, \infty \rangle$. Pak je symetrickým Nashovým ekvilibriem hrát:
Je-li $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ pro $\lambda > 0$, $N = 2$, pak:

$$\beta^I(x) = \frac{1}{\lambda} - \frac{x \exp(-\lambda x)}{1 - \exp(-\lambda x)}$$

Další témata aukcí

- Vliv rizika na chování hráčů – jak hráči chápají své riziko v aukci (riziko neúspěchu).
- Revenue Equivalence Theorem – za jistých okolností (vztaženo k riziku) jsou všechny základní aukce strategicky ekvivalentní (návrhář mechanismu si zjednoduší práci).
- Vickrey-Clarke-Groves mechanismus – matematické základy "Vickrey auction".

Vztah k riziku

- Risk-neutral, Risk-averse (nesnáší riziko), Risk-seeking (vyhledává riziko).
- Risk-averse hráč nemá vztah mezi ziskem a užitkem lineární.
- Příklad: Je nabídnuto 50 peněz nebo 50% získání 100 peněz. Risk-averse hráč vezme 50 peněz, risk-seeking hráč vezme šanci 50% na získání 100 peněz a risk-neutral je indiferentní mezi oběma.
- Prodávající (návrhář mechanismu) by si měl všímat vztahu kupujících k riziku, protože v případě 1st-aukce má význam pro volbu $\beta^I(x)$.

Ekvilibrium v aukci s první cenou s ohledem na riziko

Přístup k $\beta^I(x)$ je pro hráče volbou jeho strategie. Profil $(\beta^I(x_1), \beta^I(x_2), ...)$ je NE, protože žádný hráč nezvýší zvůj užitek volbou jiného přístupu.

Ekvilibrium pro risk-neutral hráče (pouze maximalizují zisk):

$$\beta^I(x) = \frac{N-1}{N}x$$

Ekvilibrium pro risk-averse hráče s koeficientem $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ nebo $\alpha = 1$.

$$\beta^I(x) = x^\alpha$$

Ekvilibrium pro risk-seeking hráče: (najděte v literatuře, projekty)

Revenue Equivalence Principle

- Známe racionální chování kupujících v aukci – tzn., jakou mají zvolit strategii v zadaném aukčním mechanismu.
- Jaká je ovšem pozice prodávajícího? Volba pravidel aukce je způsobem jeho strategického rozhodování.
- I prodávající přemýšlí o situaci: jaké ohodnocení mají hráči? **Jaký mají vztah k riziku?**
- Revenue = výnos aukce pro prodávajícího.
- Budeme předpokládat *standardní aukce* – aukce, kde vítěz je ten, co vsadil nejvíc (opačným příkladem je loterie s losy, kde se šance zvítězit zvyšuje s počtem zakoupených losů, ale vítěz může být kdokoliv).

Ukážeme, že za jistých okolností (nepříliš nepravděpodobných) jsou všechny aukční mechanismy ekvivalentní z pohledu výnosu aukce (zaručují shodný očekávaný výnos aukce).

Revenue Equivalence Principle

Porovnejme 1st a 2nd price aukce, kde jsou dva hráči s ohodnoceními a a b, a, b je rovnoměrně rozloženo na $\langle 0, 1 \rangle$.

Výnos $y^*_{II} = min(a, b)$ a $y^*_I = max(a/2, b/2)$.

Jaké jsou ovšem očekávané (pravděpodobnostní) výnosy?

$$E(y^*_{II}) = E(y^*_I) = \frac{1}{3}$$

Revenue Equivalence Principle

Theorem

Předpokládejme risk-neutral hráče. Mají-li symetrické a nezávislé privátní ohodnocení předmětu aukce, aukce je standardní a zaručuje nulovou platbu hráči deklarujícímu nulové ohodnocení. Pak je výnos aukce při aukci s první cenou shodný s aukcí s druhou cenou.

Obecně vzato pak nezáleží na typu aukčního mechanismu. Průměrný očekávaný výnos z aukce bude vždy stejný.

Hrají-li risk-neutral hráči, je jedno, zda volíme 1st nebo 2st price aukci.

Rozdíl výnosů mezi 1st a 2nd price aukcemi při risk-averse hráčích

Theorem

Předpokládejme risk-averse hráče. Mají-li symetrické a nezávislé privátní ohodnocení předmětu aukce, pak je výnos aukce při aukci s první cenou vyšší než u akce s druhou cenou.

Hrají-li risk-averse hráči, je lépe volit 1st price aukci.

Vickrey-Clarke-Groves mechanismus

- W. Vickrey v roce 1961 publikoval návrh aukce s druhou cenou, kde ukázal, že je nemanipulovatelná (hráč deklarující nepravdivé ohodnocení předmětu nezíská víc).
- Clarke (1971) a Groves (1973) tuto myšlenku zobecnili do VCG-mechanismu.
- Budeme VCG-mechanismus definovat.
- Ukážeme, že je strategicky nemanipulovatelný.
- Ukážeme aplikace.

Notace

Předpokládejme množinu alternativ A.

Každý hráč deklaruje svou ohodnocovací funkci

$$v_i : A \rightarrow \mathbb{R}$$

Hráč dává funkcí v_i veřejně najevo, jak si cení jednotlivé alternativy $a \in A$.

Množina všech ohodnocovacích funkcí hráče je V_i (je to totožné s S_i u strategických her). **Může nám sdělit libovolný postoj $v_i \in V_i$, my chceme jeho pravdivý postoj.**

Dále definujeme $v = (v_1, v_2, ..., v_N)$ jako profil, $v \in V$, $V = V_1 \times V_2 \times ... \times V_N$. Podobně chápeme V_{-i} a v_{-i}.

Mechanismus (direct revelation)

Definition

Mechanismus je dán funkcí veřejné volby $f : V_1 \times ... \times V_N \to A$ a vektorem plateb $p_1, ..., p_N$, kde $p_i : V_1 \times ... \times V_N \to \mathbb{R}$ je částka, kterou zaplatí hráč i.

Pak průběh:

- Hráči sdělí své ocenění, tzn. postoje $v_i \in V_i$ vůči různým alternativám $a \in A$.
- Funkce veřejné volby rozhodne, která alternativa $a \in A$ se zvolí.
- Určí se pro každého hráče $i \in Q$, kolik zaplatí – $p_i : V_1 \times ... \times V_N$.

Nemanipulovatelnost mechanismu

Definition

Mechanismus $(f, p_1, ..., p_N)$ se nazývá **nemanipulovatelný** (incentive compatible, strategy-proof), pokud pro každého hráče i, pro každý profil $v \in V$ a každé $v'_i \in V_i$, pokud víme, že $a = f(v_i, v_{-i})$ a $a' = f(v'_i, v_{-i})$, pak platí

$$v_i(a) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(a') - p_i(v'_i, v_{-i})$$

Stále dokola: pokud hráč říká pravdu, není na tom hůř než když lže.

Co nám to může připomínat?

VCG-mechanismus

Hledáme takovou funkci veřejné volby f, aby v dané situaci vybírala veřejné optimum, tzn. $\max_{a \in A} \sum_i v_i(a)$.

Definition

Mechanismus $(f, p_1, ..., p_N)$ se nazývá Vickrey-Clarke-Groves mechanismus (VCG), pokud:

- f maximalizuje společenský užitek, tedy

$$f(v_1, ..., v_N) \in arg \max_{a \in A} \left[\sum_i v_i(a) \right]$$

- pro sadu funkcí $h_1, ..., h_N$, kde $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$, definujeme

$$p_i(v_1, ..., v_N) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, ..., v_N))$$

VCG-mechanismus

$$p_i(v_1, ..., v_N) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, ..., v_N))$$

Jinak řečeno, platba za účast ve hře je dána složkami:

- $h_i(v_{-i})$, tedy platby, o které rozhodne mechanismus z kontextu v_{-i}
- $-\sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, ..., v_N))$, tedy nahrazení hodnoty, kterou protihráči ztrácí faktem, že nejsou vybráni

VCG-mechanismus (nemanipulovatelnost)

Theorem

Každý VCG-mechanismus je strategicky nemanipulovatelný.

Hráč, který deklaruje nepravdivé ohodnocení, nezíská víc.

Důkaz [Nisan, p. 219]

Clarke Pivot Rule

Trochu jsme odsunuli problém jeho převedením na formulaci funkcí $\{h_i(v_{-i})\}_{i \in Q}$.

Definition

- Mechanismus je (ex-post) individuálně racionální, pokud hráči vždy získají kladný zisk (tedy i nulový). Formálně, pro všechny $v \in V : v_i(f(v)) - p_i(v) \geq 0; \forall i \in Q$.
- Mechanismus nemá žádné postranní platby, pokud žádný hráč platbou nezíská. Formálně, $\forall v \in V : \forall i \in Q : p_i(v) \geq 0$ (p_i nedává záporné hodnoty platby).

Hráč i účastí ve hře získává $u_i(v) = v_i(f(v)) - p_i(v)$, tzn. jak si cení výsledku $f(v)$ po odečtu platby $p_i(v)$.

Clarke Pivot Rule

Definition

Clarke pivot platba je

$$h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \left[\sum_{j \neq i} v_j(b) \right]$$

Potom je platba hráče v profilu $v \in V$ dána

$$p_i(v) = \max_b \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

kde $a = f(v)$.

Hráč zaplatí do systému částku, která se rovná celkové škodě, kterou ostatním způsobil.

Clarke Pivot Rule

Lemma

VCG mechanismus s Clarke pivot platbou nezpůsobuje žádné postranní platby. Pokud je $v_i(a) \geq 0$ *pro všechny* $v_i \in V_i$ *a* $a \in A$*, pak je také individuálně racionální.*

VCG mechanismus – single-object aukce

- $A = \{i - wins | i \in Q\}$ – kdo má vyhrát.
- Každý hráč hodnotí své vítězství kladně, vítězství jiného nulově:
- $V_i = \{v_i | v_i(i - wins) \geq 0; \forall j \neq i : v_i(j - wins) = 0\}$
- Pokud má hráč v plánu deklarovat pouze cenu x_i, pak je $v_i(i - wins) = x_i, v_i(j - wins) = 0 \ \ \forall j \neq i$. Jinak může deklarovat další funkce $v_i^1, v_i^2, \ldots$
- VCG mechanismus s Clarkovým pivotem nám dává přesně Vickreyovu aukci.

VCG mechanismus – single-object aukce

Mějme situaci tří hráčů, tzn. $A = \{1, 2, 3\}$, kde
$x_1 = 10, x_2 = 15, x_3 = 4$. Následuje jeden možný profil v:

i/A	1	2	3
$v_1(a)$	10	0	0
$v_2(a)$	0	15	0
$v_3(a)$	0	0	4

$f(v) = 2$ je zvolena alternativa "vyhrál 2". Platby hráčů jsou:

$p_1(v) = \max[0, 15, 4] - 15 = 0$
$p_2(v) = \max[10, 0, 4] - 0 = 10$
$p_3(v) = \max[10, 15, 0] - 15 = 0$

VCG mechanismus – multi-object aukce

Mějme k nerozlišitelných objektů v aukci, kde $k < N$. Předpokládejme, že každý hráč chce koupit nejvýše jeden kus.

- $A = \{S - wins | S \subset Q, |S| = k\}$
- Každý hráč hodnotí své vítězství kladně v^*, vítězství jiného nulově:
- $v_i(S) = v^*$, pokud $i \in S$, jinak $v_i(S) = 0$.
- Maximalizací společenského užitku je prodat objekt k kupujícím, kteří si ho nejvíc hodnotí.
- Pivotem je platba ceny $k + 1$ nejvyšší nabídky.

VCG mechanismus – stavba veřejně prospěšného objektu

Vláda plánuje zbudovat objekt o stavebních nákladech C, pokud $\sum_i v_i > C$.

- Předpokládáme hráče $v_i \geq 0$, ale je přípustné i $v_i < 0$
- Problémem je oznámit pivotní pravidlo takové, aby hráči měli potřebu pravdivě deklarovat svá v_i
- Clarke pivot: hráč i s $v_i \geq 0$ zaplatí nenulovou částku pouze tehdy, je-li pivotním hráčem, tzn.:
- $\sum_{j \neq i} v_j \leq C$ a současně $\sum_{j \in Q} v_j > C$. V takovém případě zaplatí $p_i = C - \sum_{j \neq i} v_j$.
- Hráč se záporným ohodnocením zaplatí nenulovou částku pouze, když $\sum_{j \neq i} v_j > C$ a $\sum_j v_j \leq C$, pak $p_i = \sum_{j \neq i} v_j - C$.

Bohužel vždy bude platit $\sum_i p_i < C$.

VCG mechanismus – stavba veřejně prospěšného objektu

Situace je jiná, než u příkladu se Shapleyho hodnotou (tady hráči nemusí dát v sumě C). Mějme tři hráče $v_1 = 10, v_2 = 5, v_3 = 4$, $C = 17$.
$p_1 = 17 - 9 = 8$
$p_2 = 17 - 14 = 3$
$p_3 = 17 - 15 = 2$
$\sum_j p_j = 13$
Mechanismus je odolný proti manipulaci, neboť pokud $v_1' = 8$, pak $p_1' = 17 - 9$. Při $v_1'' = 7$ se stavba již nepostaví.

Další příklady kap. 9.3.5. [Nisan, s. 220].

Zanedbáno

- Third-price auction.
- Nesymetrické distribuční funkce ohodnocení hráči.
- Modelování risk-averse hráčů.
- Multi-object aukce.

Příště

- Evoluční teorie her.
- Case-study: modelování energetických trhů v ČR a střední Evropě.
- Závěrečné opakování.