THE: Nekooperativní hry v normální formě (Non-cooperative Normal-Form Games)

Martin Hrubý

Brno University of Technology
Brno
Czech Republic

October 3, 2013

Úvod

Čerpáno z:

- Fudenberg, D., Tirole, J.: Game Theory, The MIT Press, 1991
- Osborne, M., Rubinstein, A.: A Course in Game Theory, The MIT Press, 1994
- McCarthy, N., Mierowitz, A.: Political Game Theory: An Introduction, Cambridge University Press, 2007
- Magdaléna Hykšová: Přednášky z teorie her, Fakulta dopravní ČVUT

Úvod:

- Hry v normální formě (tzv. strategické hry) jsou nejobecnějším pojetím strategické interakce.
- V rámci nich zkoumáme kooperativní a nekooperativní hry.
- Provedeme klasifikaci her. Dnešní přednáška bude o *nekooperativních* strategických hrách s *nenulovým součtem*.

Dělení strategických her

Podle způsobu hraní hry:

- Hry jednotahové – hry v normální formě (normal-form games).
- Hry dynamické (sekvenční hry, hry v rozšířené formě) – hráči se střídají v tazích (angl. dynamic games, extensive-form games).
- Částečná převoditelnost.

Podle možností komunikace mezi hráči před volbou strategie:

- Nekooperativní – základní forma strategické interakce.
- Kooperativní – fundamentálně odlišné. Zkoumáme spíše předpoklady pro kooperativnost v jednání.

Podle míry konkurence/soutěživosti:

- S nenulovým součtem.
- S konstantním/nulovým součtem – striktně kompetitivní hry.

Pozn.: Další dělení je podle míry informace hráčů.

Další pokračování studia her

Ve strategických hrách:

- Smíšené strategie.
- Opakování ve hrách.
- Korelované ekvilibrium.
- Evolučně stabilní strategie.

V mechanism designu:

- Návrh mechanismů.
- Teorie veřejné volby.
- Teorie aukcí.

Úvodní krátké demo strategické hry s nenulovým součtem

A/B	left	right
top	1,2	3,4
bottom	5,6	7,8

Jak se hraje nekooperativní hra v normální formě (ilustrativní představa):

- Hráči si všichni uvědomují, že jsou účastníky ve hře.
- Hráči spolu nekomunikují.
- Hráči se rozhodnou, jakou strategii budou hrát, napíší ji na lístek, ten vloží do obálky a obálku odevzdají nezávislému arbitrovi.
- Všichni hráči odevzdají svou obálku ve stejný okamžik.
- Arbitr najednou otevře všechny obálky a zveřejní hrané strategie hráčů.
- Hráčům je přidělen zisk daný modelem situace a podle hraných strategií.

Demo, provedení tahu

A/B	left	right
top	1,2	3,4
bottom	5,6	7,8

1. Hráči oba (všichni) zvolí tajně svou strategii. V našem příkladě řádkový (A) zvolí "top", sloupcový (B) zvolí "right".
2. Nezávislý arbitr zjistí volbu strategií a přidělí hráčům jejich zisky:
   - Řádkový dostane zisk 3
   - Sloupcový dostane 4
3. Pokud se výsledek hráčům nelíbí, mají smůlu: další kolo hry už nebude. Měli uvažovat lépe.

V poznání jedno-tahovosti mnoha her spočívá značné rozčarování v mnoha lidských situacích. Lidé se mnohdy nechovají racionálně (správně) proto, že mají dojem *že se to přece vždycky dá napravit, néééé...?!* – Experimentální teorie her.

Co je to ta hra...?

- Hra je strategická interakce mezi dvěma a více hráči, kteří svou činností chtějí dosáhnout optimálního výsledku ve hře.
- Hra je matematický model rozhodovací situace – je to tedy *zjednodušení problému na jeho podstatné prvky*.
- Hlavním zjednodušujícím předpokladem je předpoklad *racionality* hráčů.

Pod toto označení spadá velmi mnoho věcí, cokoli od rulety po šachy, od bakaratu po bridž. A nakonec každá událost – jsou-li dány vnější podmínky a účastníci situace (a ti se chovají dle svobodné vůle) – může být považována za společenskou hru, jestliže sledujeme účinek, jaký má na účastníky [John von Neumann, 1928].

Juli Zeh: Hráčský instinkt, Odeon, 2006

Hry s nulovým a nenulovým součtem

- Historicky dříve byly zavedeny hry s nulovým součtem. Věta o minimaxu, John von Neumann.
- Až později (1950-1) byl definován koncept ekvilibria ve hrách s nenulovým součtem (J. Nash).
- V THE probereme nejdříve hry s nenulovým součtem (jsou přirozenější). Hry s nulovým součtem jsou speciálním případem her s nenulovým součtem (matematicky).

Sociologický/psychologický aspekt her s nulovým součtem (doc. Franěk, UHK)

Nulový součet:

- Situace, jež má skončit nulovým součtem, je situací soutěžení.
- Být hráčem s nulovými součty znamená věřit, že ve všech životních situacích jsou jen dvě možnosti: získat nebo ztratit.
- Z psychologického (i etického) hlediska je pojímání mezilidských kontaktů jako "her s nulovým součtem" poruchové, v řadě případů sociopatické.

Nenulový součet:

- Oba mohou "zvítězit".
- Je naděje na kooperativní chování vedoucí k efektivnějšímu výsledku hry.

Pedro/Juana	Spolupracovat	Trestat
Rozdělit spravedlivě	10,10	0,0
Rozdělit vychytrale	100,1	0,0

Common knowledge

Aumann, R: Agreeing to Disagree, The Annals of Statistics, Vol. 4, No. 6. (Nov., 1976), pp. 1236-1239. (**v knihovně: Aumann: Collected Papers, vol. 1**)

Zatím pouze zkráceně definujme *společnou znalost*.

- Mějme dva hráče A a B
- Událost E je pro hráče $\{A, B\}$ common knowledge, pokud:
  - ... hráči $\{A, B\}$ oba ví o události E
  - ... hráč A ví, že B ví o události E
  - ... hráč B ví, že A ví o události E
  - ... hráč A ví, že B ví, že A ví o události E
  - ... hráč B ví, že A ví, že B ví o události E
  - takto až do nekonečného zanoření

Příklad: dva vojevůdci se informují o místě a času bitvy. Vojevůdce A vyšle k B posla, ...

Common knowledge – příklad s modrookými na ostrově

Mějme ostrov, kde žijí lidé s modrýma (M) a zelenýma (Z) očima. Počet M je $k \geq 1$. Na ostrově nejsou zrcadla a lidi se o barvě očí nebaví (mají možnost pouze pozorovat). Předpokládáme, že jsou všichni naprosto logicky uvažující.

- Pokud se člověk o sobě dozví, že je M, pak musí následující den za svítání ostrov opustit.
- Jednoho dne přijde cizinec a všem veřejně oznámí: "je tu alespoň jeden M".
- Před příchodem cizince nebyl tento stav common knowledge.

Co se stane?

- $k = 1$, příští den M odejde
- $k = 2$, příští den nic, 2. svítání odejdou oba. Každý M ví, že existuje M, ale každý M neví, že jiný M má tu stejnou znalost.
- $k > 2$, $k-$té svítání odejdou všichni M

Struktura hry

- Pravidla – způsob hraní hry, předpoklady, ...
- Hráči – nezávislé inteligentní entity sledující svůj záměr (jednou z definic racionality je "snaha definovat své cíle a ty se snažit naplnit").
- Hráči hrají hru tím, že volí své tahy – strategie, akce, volby.
- Volba akce vede k nějakému následku – užitku ve hře.
- Hráči mají jistou informaci o hře – znají protihráče, jejich akce a formu (a velikost) užitku.
- Hráči se na základě znalostí o hře *rozhodují*.

Definice strategické hry N hráčů, $N \geq 2$

Definition

Strategická hra N hráčů je $(2N + 1)$-tice

$$\Gamma = (Q; S_1, S_2, ..., S_N; U_1, U_2, ..., U_N)$$

- $Q = \{1, 2, ..., N\}$ je konečná množina hráčů ve hře.
- $S_i, i \in Q$ jsou (konečné) množiny ryzích strategií hráčů $i \in Q$.
- $U_i : S_1 \times S_2 \times ... \times S_N \to \mathbb{U}$ jsou funkce užitku hráčů.

Poznámky:

- $\mathbb{U}$ je univerzum všech možných užitků. Často klademe $\mathbb{U} = \mathbb{R}$.
- $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_N$ je množina strategických profilů ve hře. $s \in S$ je strategický profil.
- Prostor S nám udává rozměr problému, který musíme algoritmicky řešit.
- Ryzí (angl. pure) a smíšené (angl. mixed) strategie.

Příklad hry

A/B	left	right
top	1,2	3,4
bottom	5,6	7,8

- $Q = \{A, B\}$.
- $S_A = \{top, bottom\}$, $S_B = \{left, right\}$.
- $S = S_A \times S_B = \{(top, left), (top, right), (bottom, left), (bottom, right)\}$
- $U_A(top, left) = 1$, $U_A(top, right) = 3$, ..., $U_B(bottom, right) = 8$

Užitky zapisujeme přehledně do matice – maticové hry.

Informace o hře

Aby hráči mohli provést rozhodnutí, musí mít nějaké informace o hře. Zatím předpokládáme (pro jednoduchost), že jim žádná informace o hře nechybí (jinak by si museli udělat o stavu některých věcí stochastický model).
Proto zavedeme pojem *kompletní informace ve hře* (angl. complete information):

Definition

Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. Pokud jsou pro všechny zúčastněné hráče Q následující informace *common knowledge*:

- struktura hry Γ,
- výplatní (užitkové) funkce $U_i; i \in Q$,
- způsob hraní hry a forma herního ekvilibria,

a současně tento fakt samotný je common knowledge, pak mají hráči *kompletní informaci o hře*.

Rozsah informací ve hře

- Common knowledge.
- Kompletní informace (complete information). Nekompletní informace (incomplete information, Bayesian games)
- Dokonalá informace (perfect information). Nedokonalá informace (imperfect information).

Nulový versus Nenulový součet formálně

Definition

Mějme hru Γ. Řekneme, že Γ je hra s konstantním součtem $k \in \mathbb{R}$, pokud platí

$$\forall s \in S : \sum_{i \in Q} U_i(s) = k$$

Pokud je $k = 0$, pak je Γ hra s nulovým součtem.

U her s nenulovým součtem nelze najít $k \in \mathbb{R}$ takové, že by platila předchozí podmínka.

Co je cílem? Solution concept...

Strategická hra N hráčů s nenulovým součtem je matematický model konfliktní situace.

- Tento model obdržíme nebo vytvoříme (věříme, že všichni hráči model odvodí stejně).
- Věříme, že existuje nějaké racionální chování hráčů, které je formalizovatelné. Hledáme *řešení hry*.
- *Pokud existuje model chování ve formě algoritmu nad modelem hry, pak matematickým řešením hry získám predikci chování hráčů ve skutečnosti.*
- Formalizace chování – solution concept.

Snahou je predikovat chování hráčů nebo alespon rozumět jejich chování.

Model chování hráčů

Hráči čelí situaci a musí zvolit svůj tah. Provádí určitou úvahu.

- Budeme zkoumat postup hráčova uvažování.
- Teoreticky se nemusíme *učit, jak se rozhodnout*. Model rozhodování pouze algoritmizuje přirozenou inteligenci a racionální přístup k řešení rozhodování.

Výsledkem rozhodování každého hráče $i \in Q$ je volba nějaké ryzí strategie $s_i^* \in S_i$, u které hráč věří, že mu přinese maximální užitek (outcome).
Výsledek volby všech hráčů je pak strategický profil

$$s^* \in S, s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_N^*)$$

Pokud profil s^* splňuje určité vlastnosti, je nazýván ekvilibrium ve hře (česky rovnováha).

Úvod do analýzy her

A/B	left	right
top	1,2	3,4
bottom	5,6	7,8

- Jakou strategii zvolí hráč A, pokud by hráč B měl hrát *left*? Hráč maximalizuje svůj užitek.
- Hráč si rozmýšlí svoje možné nejlepší odpovědi na možné tahy protihráče.
- Pozor, hra je jednotahová, tzn. veškeré promýšlení se odehrává v myslích hráčů. Hráči musí hru kompletně strategicky rozebrat.
- Hráči mají pouze jednu možnost táhnout!

Charakteristika Best-response (BR), nejlepší odpověď

Hra $\Gamma = (Q; S; U)$.

- Nechť hráč $i \in Q$ přemýšlí, co bude hrát, když jeho protivníci $Q_{-i} = Q \setminus \{i\}$ budou hrát konkrétní strategie $s_j, j \in Q_{-i}$.
- Připomeňme množinu $S = \prod_{i \in Q} S_i$. Zavedeme množinu:

$$S_{-i} = \prod_{j \in Q_{-i}} S_j$$

- Prvek $s_{-i} \in S_{-i}$ je jakýsi *kontext rozhodování* (sub-profil).
- Notace: (s_i, s_{-i}) je složení do celého profilu, $(s_i, s_{-i}) \in S$

V kontextu $s_{-i} \in S_{-i}$ hráč i volí $s_i \in S_i$ tak, že $U_i(s_i, s_{-i})$ je na $\{(s_i, s_{-i}) | s_i \in S_i\}$ maximální.

$$M_i(S_i, s_{-i}, \geq) = \{s_i^* \in S_i | U_i(s_i^*, s_{-i}) \geq U_i(s_i, s_{-i}); \forall s_i \in S_i\}$$

Charakteristika Best-response, formálně

Množina profilů hry:

$$S = \prod_{i \in Q} S_i$$

Množina sub-profilů hry (pro každého hráče $i \in Q$!!!):

$$S_{-i} = \prod_{j \in Q_{-i}} S_j$$

Best-response hráče i v sub-profilu $s_{-i} \in S_{-i}$:

$$BR_i(s_{-i}) = arg \max_{s_i \in S_i} [U_i(s_i, s_{-i})]$$

Poznámka: promyslete si algoritmus výpočtu $BR_i(s_{-i})$. Jaké má vstupy a výstupy?

Charakteristika Best-response

Z definice: $BR_i(s_{-i}) \subseteq S_i$.

- Hráč v kontextu s_{-i} volí svou nejlepší odpověď $BR_i(s_{-i})$. Takto se zřejmě budou chovat všichni.
- Vzájemná nejlepší odpověď bude asi rovnovážný profil ve hře – tzn. rovnováha – žádný hráč nechce měnit svou strategii.
- Situace, kdy pro nějaké $i \in Q$ a $s_{-i} \in S_{-i}$ je $|BR_i(s_{-i})| > 1$ vyjadřuje určitou nejistotu hráče v jeho tahu. Vede na smíšené chování (později).
- Zřejmě vždy platí: $\forall i \in Q, \forall s_{-i} \in S_{-i} : |BR_i(s_{-i})| > 0$. Proč??

Best-response je základ všech herně-teoretických algoritmů.

Best-response je korespondence:

$$BR_i : S_{-i} \to\to S_i$$

Dominantnost strategií ve hře

Pedro/Juana	Spolupracovat	Trestat
Rozdělit spravedlivě	10,10	0,0
Rozdělit vychytrale	100,1	0,0

V některých rozhodovacích situacích jasně cítíme, že jedna strategie s^1 je výrazně lepší než druhá s^2 bez ohledu na další okolnosti. Říkáme, že taková strategie s^1 striktně dominuje nad s^2.

Definition

Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. Strategie s_i^1 hráče $i \in Q$ striktně dominuje nad jeho strategií s_i^2, pokud platí že:

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} : U_i(s_i^1, s_{-i}) > U_i(s_i^2, s_{-i})$$

Co z toho plyne? Racionální hráč $i \in Q$ bude vždy preferovat s_i^1 nad s_i^2. Strategie s_i^1 je dominantní (dominant) a strategie s_i^2 je dominovaná (dominated).

Dominantnost strategií ve hře

- Pokud platí, že s_i^1 striktně dominuje nad všemi $S_i \setminus \{s_i^1\}$, pak je s_i^1 pro hráče i striktně dominantní.
- Pokud $\forall s_i^1 \in S_i \setminus \{s_i^2\}$ platí, že s_i^1 striktně dominuje nad s_i^2, pak je s_i^2 striktně dominovaná.
- Pokud má racionální hráč striktně dominantní strategii, bude ji vždy hrát.
- Pokud má racionální hráč striktně dominovanou strategii, tak ji nikdy hrát nebude.
- Racionální hráč si uvědomuje existenci dominantních strategií svých protihráčů.
- Má každá hra striktně dominantní strategii?

Poznámka: promyslete si algoritmus výpočtu dominance strategií. Jaké má vstupy a výstupy?

Dominantnost strategií ve hře

Striktní dominance zavádí opět formu *preference hráče*. Jaká je to relace?

$$\succ_i \subseteq S_i \times S_i$$

- Je úplná? Platí $\forall s_i^1, s_i^2 \in S_i; s_i^1 \neq s_i^2 : s_i^1 \succ_i s_i^2 \vee s_i^2 \succ_i s_i^1$??
- Je reflexivní?
- Je tranzitivní?
- Je symetrická?
- Je asymetrická?
- Je antisymetrická?

Dá se o striktní preferenci nad strategiemi něco říci?

Příklad: Vězňovo dilema

Jedna z nejslavnějších herních situací. Mnoho výkladů.

- Policie zadrží Petera a Johna, kteří jsou podezřelí z bankovní loupeže. Neexistuje však proti nim přímý důkaz.
- Podezřelí Peter a John jsou umístěni do oddělených cel a vyslýcháni zvlášť $\Rightarrow$ nemohou spolu komunikovat (kooperace, vyjednávání).
- Mají každý dvě možnosti: vypovídat (přiznat se a zradit kumpána), mlčet (spolupracovat s kumpánem). Cílem policie je z nich dostat přiznání.
- Policie každému sdělí: pokud budeš vypovídat a tvůj kumpán mlčet, pak tě pustíme a tvůj kumpán dostane 20 let. Pokud budete vypovídat oba (přiznáte se), dostanete oba 10 let. Pokud budete oba mlčet, dostanete aspoň každý 1 rok za nedovolené držení zbraně.
- Každý podezřelý předpokládá: racionalitu protihráče, kompletní informaci o hře.

Příklad: Vězňovo dilema

Peter/John	vypovídat	mlčet
vypovídat	-10,-10	0,-20
mlčet	-20,0	-1,-1

- Jaká je $BR_{Peter}(vypovidat)$ a $BR_{Peter}(mlcet)$?
- Dominuje *vypovidat* nad *mlcet*?
- *vypovidat* je strikně dominantní strategie, racionální hráč ji bude vždy hrát.
- Oba hráči mají striktně dominantní strategii. Vzniká **ekvilibrium striktně dominantních strategií** (nepříliš v realitě časté).
- Ekvilibrium: $s^* = (vypovidat, vypovidat) \Rightarrow U_i(s^*) = -10$

Příklady vězňova dilematu v našem životě

- Vězňovo dilema má překvapivě hodně realizací v našem životě. Ve všech je pak patrné, že sobeckost a neschopnost kooperovat vede na méně optimální výsledek hry.
- Všechny aspekty reklamy a obchodu: investovat do reklamy, uvádět DPH u výrobků, ...
- Zbrojení, mezinárodní vztahy.
- Užívání hromadné dopravy versus osobní auta.

A/B	Zrada	Spolupráce
Zrada	(trest,trest)	(pokušení,oškubání)
Spolupráce	(oškubání,pokušení)	(odměna,odměna)

oškubání $<$ **trest** $<$ **odměna** $<$ **pokušení**

Jsme jako společnost určeni k zániku? ☺

Varianty vězňova dilematu

Peter/John	vypovídat	mlčet
vypovídat	-10,-10	0,-20
mlčet	-20,0	-1,-1

Zlepší se výsledek, když:

- vězni mají možnost komunikace před provedením rozhodnutí?
- se situace opakuje?
- je common knowledge, že zrádce bude bídně zastřelen kumpány venku? (důvěryhodná hrozba):

Peter/John	vypovídat	mlčet
vypovídat	-500,-500	-1000,-20
mlčet	-20,-1000	-1,-1

Iterativní eliminace dominovaných strategií

Myšlenka: pokud hráč nikdy nebude hrát striktně dominovanou strategii, pak je tato ve hře zbytečná (resp. v jeho množině strategií).

- Které strategie jsou pro hráče racionální?
- Hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$ je tedy možno redukovat na $\Gamma' = (Q; \{S'_i\}_{i \in Q}; \{U'_i\}_{i \in Q})$ bez ztráty strategické věrohodnosti.
- Redukce $\Gamma \vdash \Gamma'$
- Redukce iterativně probíhá, dokud je ve hře nějaká dominovaná strategie
- $\Gamma \vdash \Gamma_1 \vdash ... \vdash \Gamma_{j-1} \vdash \Gamma_j$, kde $\Gamma_j = \Gamma_{j-1}$

Iterativní eliminace dominovaných strategií: $\vdash$

Vstup: hra $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$
Výstup: hra $\Gamma' = (Q; \{S'_i\}_{i \in Q}; \{U'_i\}_{i \in Q})$

1. $\forall i \in Q$: $S^i_d := \{s_i \in S_i | s_i$ je striktně dominovaná $\}$.
2. $\Gamma' = (Q; \{S_i \setminus S^i_d\}_{i \in Q}; \{U'_i\}_{i \in Q})$
3. $\forall i \in Q : \forall s' \in S' : U'_i(s') = U_i(s')$ jsou redukované funkce užitku (restrikce U_i na U'_i)

Slabá dominance

- Podobný druh dominance, který však už není striktní.
- Není již zcela korektní eliminovat slabě dominované strategie (mohly by tvořit ekvilibrium).

Definition

Strategie s_i^1 hráče $i \in Q$ slabě (weakly) dominuje nad jeho strategií s_i^2, pokud platí, že:

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} : U_i(s_i^1, s_{-i}) \geq U_i(s_i^2, s_{-i})$$

a současně

$$\exists s_{-i} \in S_{-i} : U_i(s_i^1, s_{-i}) > U_i(s_i^2, s_{-i})$$

Pozn.: Aplikace eliminace založené na slabé dominanci jsou možné v politických vědách (volební mechanismy). Příklad viz McCarthy.

Eliminace her algoritmicky

Zajímavé pojednání je v článku:
Itzhak Gilboa, Ehud Kalai, Eitan Zemel: The Complexity of Eliminating Dominated Strategies, MATHEMATICS OF OPERATIONS RESEARCH, Vol. 18, No. 3, August 1993, pp. 553-565

(Strategická) ekvivalence her

Definition

Hra $\Gamma = (Q, \{S_i\}_{i \in Q}, \{U_i\}_{i \in Q})$ je ekvivalentní s hrou $\Gamma' = (Q, \{S_i\}_{i \in Q}, \{U'_i\}_{i \in Q})$, pokud existují pro každého hráče $i \in Q$ reálná čísla A_i, B_i, kde $A_i > 0$ a platí $\forall s \in S$:

$$U'_i(s) = A_i U_i(s) + B_i$$

Tzn., pokud ke hře připočtu nějaké číslo (resp. vynásobím konstantou), **strategický charakter hry se nezmění**.

Poznámka: Problém finančního poradce.

Best-response ekvivalence

Definition

Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. Nechť

$$BRs_i = \bigcup_{s_{-i} \in S_{-i}} BR_i(s_{-i})$$

Pak je hra

$$\Gamma' = (Q; \{BRs_i\}_{i \in Q}; \{U'_i\}_{i \in Q})$$

BR-ekvivalentní s Γ.

Pozn.: zamyslete se nad algoritmem výpočtu BR-ekvivalentní hry.
Pozn.: může Γ' obsahovat striktně nebo slabě dominované strategie?

Never Best-response strategie

Definition

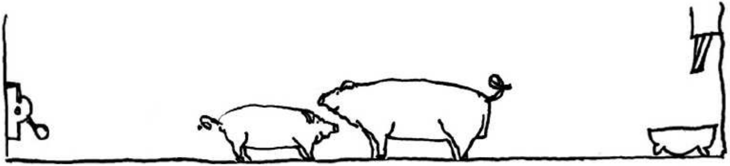
Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$. Pro každého hráče $i \in Q$ lze strategie z hlediska BR rozdělit do těchto kategorií:

- BR strategie – BRs_i.
- Always-BR (vždy) strategie – $ABR_i \subseteq BRs_i$ a platí $\forall s_i \in ABR_i : s_i \in BR_i(s_{-i})$ pro všechny $s_{-i} \in S_{-i}$
- Never-BR (nikdy) strategie – $NBR_i = S_i \setminus BRs_i$.

Jaký je vztah BR a strategické dominance? Věta, důkaz...

Hry bez striktně dominantních strategií

Striktní dominance je neobvyklá. Situace (Skinnerův chlívek): máme dvě prasata (dominantní a submisivní) zavřená ve chlívku vybavaném pákou a korytem. Když se stiskne páka, do koryta spadne žrádlo s energetickou hodnotou 10 jednotek. Cesta k páce a zpátky ke korytu spotřebuje dvě jednotky energie. Předpokládáme, že dominantní prase v souboji o koryto vždy vítězí.



dominantní/submisivní	stiskni páku	seď u koryta
stiskni páku	8,-2	5,3
seď u koryta	10,-2	0,0

Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích

- Hráč bude vždy hrát Best-response. Všichni hráči budou vždy hrát best-response na best-response protivníka, na BR na BR na BR, ...
- Vzájemná BR je rovnováha.
- Snaha hrát BR je zřejmě common knowledge ve hře.
- Ekvilibrium je strategický profil, ve kterém žádný hráč nemůže zlepšit svůj užitek změnou své strategie (tzn. změnou své strategie si může zhoršit užitek).
- Pure Nash Equilibrium (PNE).
- Mixed Nash Equilibrium (MNE).

Definice Nashova ekvilibria v ryzích strategiích

Definition

Mějme hru Γ. Profil $s^* \in S$ se nazývá Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích, pokud platí:

$$\forall i \in Q : \forall s_i \in S_i : U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq U_i(s_i, s_{-i}^*)$$

Definice platí bez ohledu na to, zda-li $s_i = s_i^*$ nebo $s_i \neq s_i^*$.

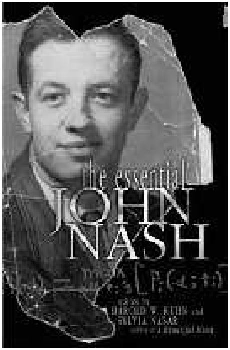
Nashovo ekvilibrium je nejvýznamnější solution concept v nekooperativních strategických hrách s nenulovým součtem. Celkově je NE základní koncept všech her.

Pozn.: Znalost definice NE a jeho pochopení je absolutně nezbytné pro předmět THE.

John Forbes Nash jr., (nar. 1928)

Nashovo ekvilibrium bylo poprvé definováno v těchto článcích:

- Nash, J.: Equilibrium points in n-person games, Proceedings of the National Academy of Sciences 36(1):48-49., 1950
- Nash, J.: Non-Cooperative Games, The Annals of Mathematics 54(2):286-295, 1951



Alternativní definice NE

Vycházíme z poznání, že NE je složeno ze vzájemně nejlepších odpovědí, tudíž:

Definition

Mějme hru Γ. Profil $s^* \in S$ se nazývá Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích, pokud platí:

$$\forall i \in Q : s_i^* \in BR_i(s_{-i}^*)$$

Pozn.: všimněme si, že matematika definuje pojem výsledku, ale neukazuje cestu k jeho výpočtu. Budeme zkoumat algoritmy výpočtu PNE (a časem MNE).

Vlastnosti PNE

Pojem *efektivnost profilu/ekvilibria*:

$$E(s) = \sum_{i \in Q} U(s)$$

- Pokud je hra Γ modelem nějaké reálné situace a Γ má PNE, pak je velmi pravděpodobné, že i hráči v realitě se budou chovat podle PNE (PNE je self-enforcing).
- Hra může mít více PNE. Pak si představme PNE jako energetickou stabilní hladinu, která udržuje hráče v nějakém chování. Pokud připustíme opakování hry, tak může dojít k přesunu chování hráčů z jednoho ekvilibria do jiného (obvykle efektivnějšího).
- Může existovat hra bez PNE, ale nějaké chování v ní hráči přesto mají (bude mít stochastický charakter).

Vlastnosti PNE: NE je neeliminovatelné

Theorem

Je-li $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_N^*)$ *Nashovo ekvilibrium, pak žádná z jeho strategií* s_i^* *nemůže být ze hry eliminována iterativní eliminací striktně dominovaných strategií.*

Intuitivně chápeme, že strategie hráčů v ekvilibriu jsou jaksi vítězící a že nemůže pro žádného hráče $i \in Q$ existovat taková strategie $s' \in S_i \setminus \{s_i^*\}$, že by $U_i(s', s_{-i}^*) > U_i(s^*)$.

Tento fakt je pro analýzu her velmi důležitý. Plyne z toho, že iterativní eliminace dominovaných strategií může být použita jako nějaké "předzpracování" hry.

Vlastnosti PNE

Theorem

Je-li $(s_1^*, s_2^*, ..., s_N^*)$ *jediný profil, který zůstal po iterativní eliminaci striktně dominovaných strategií, pak je tento profil jediným Nashovým ekvilibriem.*

Toto je taky jasné, protože pak je tento profil ekvilibrium striktně dominantních strategií. Mimo to, pokud má hra $\Gamma = (Q; S; U)$ množinu profilů takovou, že $S = \{s\}$ (tzn. $|S| = 1$), pak s je ekvilibrium, protože neexistuje pro žádného hráče jiná (lepší) strategie.

Algoritmy nalezení PNE

Algoritmy pro nalezení PNE jsou v základu jednoduché. Jejich problematičnost může spočívat v algoritmické časové složitosti.

Algoritmy:

- $PNEs(\Gamma) = \{s \in S | s\ je\ ekvilibrium\}$
- Redukce na BR-ekvivalentní hru, následně konvenční algoritmus
- Redukce iterativní eliminací striktně dominovaných strategií, ...

Konvenční výpočet:

1. Let $BRprofs_i = \bigcup_{s_{-i} \in S_{-i}} \{(b, s_{-i}) | b \in BR_i(s_{-i})\}$
2. $PNEs = \bigcap_{i \in Q} BRprofs_i$

dominantní/submisivní	stiskni páku	seď u koryta
stiskni páku	8,-2	5,3
seď u koryta	10,-2	0,0

Efektivita výsledku hry, dominance nad profily

Předpokládejme, že výpočtem dosáhneme množiny ekvilibrií $PNEs = \{s^{*,1}, s^{*,2}...\}$.

- Zkoumáme, je-li nějaký profil efektivnější než druhý, tzn. $E(s^{*,1}) >^{?} E(s^{*,2})$.
- Otázkou je opět naše schopnost *predikovat* chování hráčů – tedy, který profil $s^{*,j}$ zvolí.
- Známým modelem této situace jsou *koordinační hry*.

Pochopme, že TH nedává *odpovědi* na otázky, co hráči *udělají*. Teorie her je dle jedné hezké definice (Osborne,Rubinstein) *pytel analytických nástrojů pro pochopení chování jedinců při strategickém rozhodování*.

Jak naložit s výsledkem?

Interpretace výsledků analýzy herního modelu je proto důležitá. Pokud trváme na to, že chceme od modelu *odpověď*, pak je třeba *dodat model chování v situaci více ekvilibrií*.

Různé varianty pojetí optimálního výsledku. Nejznámější je pojetí pojmenované podle Vilfreda Pareto (1848–1923, italský ekonom).

Pareto efektivita (optimalita)

Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$:

Definition

Strategický profil (ekvilibrium) $s \in S$ pareto dominuje nad profilem $s' \in S$, jestliže platí:

$$\forall i \in Q : U_i(s) \geq U_i(s')$$

a současně existuje alespoň jedno $i \in Q$, že $U_i(s) > U_i(s')$

Pak můžeme pokračovat v rozhodování nad ekvilibrii tak, že hledáme *Pareto efektivní řešení*.

Definition

Strategický profil (ekvilibrium) $s \in S$ je pareto efektivní (optimální), pokud neexistuje jiný profil $s' \in S$, který by pareto dominoval s.

Koordinační hra

Koordinační hra je speciálním případem hry, kdy je pro hráče lepší se domluvit na společné volbě strategie (např. stejného IT standardu).
Příklady: jízda po silnici, Battle of sexes, Stag hunt (Lov na jelena, modeluje konflikt "zabezpečení se" versus sociální kooperace, Jean-Jacques Rousseau)

A/B	left	right
left	10,10	0,0
right	0,0	10,10

žena/muž	box	balet
box	2,3	1,1
balet	1,1	3,2

A/B	lovit jelena	lovit zajíce
lovit jelena	10,10	0,7
lovit zajíce	7,0	7,7

Antikoordinační hra

Slavná je hra "Game of chicken". Dva puberťáci se potřebují veřejně zviditelnit. Sednou do svých aut a jedou proti sobě. Kdo uhne, je srab (ovšem způsobí, že oba přežijí).

A/B	srab	drsňák
srab	0,0	-1,1
drsňák	1,-1	-100,-100

Je to ukázka hry, kdy je lépe volit navzájem opačné strategie. Tuto situaci budeme studovat důkladněji v dynamických hrách, kde si zavedeme pojem "důvěryhodná/nedůvěryhodná hrozba". Tušíme, že cílem je přesvědčit protivníka, že vy *rozhodně neuhnete*, pak je jeho BR uhnout.

Tato situace je známá také z tzv. Kubánské krize (Cuban missile crisis, říjen 1962).

Ultimatum game

Dva hráči se mají podělit o 100 dukátů. Dělba probíhá tak, že řádkový hráč navrhne rozdělení a sloupcový ho buď přijme (a pak je provedeno) nebo odmítne (a pak peníze nedostane nikdo).

Jaký je model hry? Má hra PNE? Věříte tomu PNE?

Nekooperativní versus kooperativní chování

Peter/John	přiznat se	zatloukat
přiznat se	-10,-10	0,-20
zatloukat	-20,0	-1,-1

- PNE je stabilní řešení hry. Bývá překvapující, jak tento outcome může být neefektivní ve srovnání s jinými profily (které ovšem nejsou self-enforcing).
- Příkladem je profil (zatloukat,zatloukat) ve Vězňově dilematu.
- Kooperativní řešení hry může být efektivnější pro společnost, ale dominováno jinou strategií jedince.
- Budeme zkoumat možnosti tvorby koalic a vyjednávání.
- Kooperativnost do chování zavádí taky opakování herní situace (kde hráči musí čelit následkům předchozí hry) – model: restaurace v turistické zóně versus hospoda pro místní.

Příklad hry bez PNE: Matching pennies

Každý hráč má penny. Tajně otočí svoje penny na heads/tails (tím volí strategii).

A/B	heads	tails
heads	1,-1	-1,1
tails	-1,1	1,-1

- Jak se zachovají hráči, pokud nemají PNE?
- Co znamená, že neexistuje PNE?
- Budou hráči hru hrát? Zřejmě musí...
- Zopakujme si, že *TH je analytický nástroj pro zkoumaní interakcí*.
- Hráči hru hrají, rozhodují se, takže musí existovat její matematický model.

Závěr

- Definice a význam hry v normální formě.
- Best-response, strategická dominance, ...
- Nashovo ekvilibrium v ryzích strategiích (PNE).
- Existují hry bez PNE, ale zřejmě mají jinou formu řešení.

Příště: Řešení smíšeného NE.