THE: Dymické hry s úplnou informací
Dynamic Games (Extensive Form Games)

Martin Hrubý

Brno University of Technology
Brno
Czech Republic

October 26, 2010

Motivace ke zkoumání her

Zpátky na začátek. Je třeba se vyrovnat s těmito fakty:

- TH se snaží studovat motivace v jednání lidí, jejich preference a možné akce. *Predikce jejich chování je až sekundární*.
- *NE je koncept chování, který je univerzálně platný*. TH z něho vychází v dalších zkoumáních. Nekooperativní hry s nenulovým součtem jsou základ strategických modelů (jsou další aplikace).
- *Existují otázky nad smyslem MNE a jeho řešením.*
- Existují lidé, kteří nad MNE definují své problémy. Jiní lidé se soustředí na výpočet MNE.
- *MNE je algoritmicky téměř neřešitelný problém.*

Kamal Jain (Microsoft research): "Když tvůj notebook nenajde řešení nějaké situace na trhu, nenajde ho ani trh". Pokud trh funguje, musí pro něj existovat i jeho simulační model. Tušíme, že někde musí existovat ten algoritmus, ale stále ho hledáme. Zatím prezentujeme dosažené výsledky.

Motivace ke zkoumání her

- Ukážeme si další koncepty NE, tzv. refinements (zpřesnění), ale i zobecnění.
- Univerzální řešení MNE neexistuje, ukazujeme principy.
  - Metody a nástroje pro nalezení "všech" ekvilibrií jsou podezřelé.
  - Obvykle pracují ve vymezené skupině her.
- Program gambit.
- MNE je jednoznačně definovaný koncept. Hledáme jeho algoritmické řešení.

Reálné modely založené na TH:

- Obecně je TH vnímáno jako "věda, do které málokdo vidí".
- Reálných modelů je málo. Ovšem není špatné se naučit takto modelovat.
- Rozbor jednoho reálného modelu bude podán koncem semestru.

Řešení reálných modelů

- Máme reálnou situaci a chceme napsat její (např. počítačový) model. Například proto, že ho někdo chce.
- Stanovíme hráče, strategie, preference, užitky a hledáme řešení.
- Jistě se v určitém okamžiku dostaneme do stavu, kdy nějakou formu ekvilibria musíme vypočítat.
- Disponujeme obecnými herně-teoretickými principy: dominance, best-response, ekvivalence her.
- Pokud je hra velká, musí existovat metody její redukce na menší (méně strategií, méně strategických hráčů).
- Pokud hledáme řešení, je v heuristikách. Je to obecný postup v UI: generovat stavový prostor a v něm hledat řešení. V příliš velkém stavovém prostoru hledáme heuristiky, které nám prostor redukují.

Dnešní téma: sekvenční hry. Úvod

Čerpáno z:

- Myerson, R. B.: Game theory: Analysis of Conflict, Harvard University Press, 2004
- Osborne, M., Rubinstein, A.: A Course in Game Theory, MIT Press
- Rasmunsen, E.: Games and Information: An Introduction to Game Theory, Blackwell Publishing, 2007
- McCarthy, N., Mierowitz, A.: Political Game Theory, Cambridge University Press, 2007
- Basar, T., Olsder, G.J.: Dynamic Noncooperative Game Theory , Society For Industrial And Applied Mathematics, 1999

Připomenutí statických her

Hry v normální formě (statické hry).

- Hráč strategicky promýšlí možné tahy svoje a protivníka.
- Asi by mu hodně usnadnilo přemýšlení, kdyby věděl, co protivník bude táhnout.
- Kdyby se mu podařilo (tajně) vyzvědět (v čase libovolně blízkém uzávěrce rozhodování), co protihráč odevzdal za rozhodnutí tomu pomyslenému nezávislému arbitrovi, tak táhne velmi efektivně.
- Ve statických hrách toto nepřipouštíme.

V sekvenčních hrách předpokládáme, že se hráči střídají v tazích a tuto skutečnost si uvědomují.

Stackelbergův model duopolu/oligopolu

Heinrich Freiherr von Stackelberg: Market Structure and Equilibrium (Marktform und Gleichgewicht) in 1934

- Bertrandův a Cournotův model předpokládá normální přístup ke hře. Hráči jsou (přibližně) stejně silní.
- Tento předpoklad neodpovídá mnohým reálným situacím s jedním extrémně silným hráčem (vůdcem, leader) a skupinou slabších hráčů (následovníků, followers).
- Stále doufáme, že všichni hráči jsou svým rozhodnutím schopni ovlivnit cenu produktu (tzn. není to monopol).
- Vznikají ovšem dvě role a dvě podoby (odlišného) chování: vůdce a následovníci.
- Vůdce: je si vědom svého postavení. Ví, že následovníci se budou inspirovat jeho rozhodnutím.
- Následovníci: čekají na rozhodnutí vůdce, pak se přizpůsobí.

Z principu tohoto rozložení sil neproběhne hra v jednom tahu, ale ve dvou.

Stackelbergův model oligopolu

Příklady ze života:

- Předpoklad: pohybujeme se v systému s nedokonalou konkurencí.
- Výroba silové elektřiny v ČR: ČEZ – vůdce, IPP (Independent Power Producers) – následovníci.
- IPP čekají na cenové rozhodnutí ČEZu, pak nastaví cenu za MWh o tři CZK nižší.
- IPP tudíž svou produkci vždy prodají (o 3 CZK/MWh levněji).
- Vůdce si tuto skutečnost uvědomuje a zahrnuje ji do svého rozhodování.

Různé přístupy v situacích, kdy je následovníků více (vícehráčovo Stackelbergovo ekvilibrium, ...).

Princip zpětné indukce, zatím neformálně

Backward induction.

- Vůdce tedy nemůže nechat vypůsobit následovníky a pak se rozhodnout (oni právě čekají na jeho tah).
- Vůdce experimentuje s možnou reakcí následovníků a hledá strategii, která mu přinese maximální zisk
    - Ta strategická úvaha je na vůdci.
    - Následovníci pouze zareagují na tah vůdce.
    - Předpokládáme (i vůdce předpokládá), že následovníci potáhnou BR.
- Zpětná indukce vede k NE, je to ovšem podmnožina možných PNE, kde nejsou zahrnuty iracionální varianty (hrozby).

Pozn.: Můžeme zavést komplikovanější chování, jako například systém vůdce versus oligopolistické chování následovníků.
Pozn.: Taková perlička - Unexpected hanging paradox.

Stackelbergův model oligopolu: design modelu

Model je v množstevních strategiích.
Firma 1 zvolí množství $q_1 \geq 0$,
Firma 2 to sleduje, zhodnotí a volí $q_2 \geq 0$.

Výplata firmy i je pak určena

$$u_i(q_i, q_j) = q_i[P(q) - c]$$

kde $P(q) = M - q$, $q = q_1 + q_2$.
c jsou výrobní náklady; $P(q)$ je cena na trhu při dodaném množství q.

R_1, R_2 budou rozhodnutí firem o množstevní strategii.

Zopakujme $u_i(q_i, q_j) = q_i[P(q) - c]$.

Backwards-induction: $R_2(q_1)$:

$$\max_{q_2 \geq 0} u_2(q_1, q_2) = \max_{q_2 \geq 0} q_2[M - q_1 - q_2 - c]$$

Hledáme tedy maximum funkce s proměnnou q_2. Matematická analýza: vyšetřování extrémů funkcí.

Hledáme extrém: $\frac{\partial f(q_2)}{\partial q_2}$; $f(q_2) = q_2 M - q_2 q_1 - q_2^2 - cq_2$
Bod extrému: $M - q_1 - 2q_2 - c = 0$

$$q_2 = R_2(q_1) = \frac{M - q_1 - c}{2}; q_1 < M - c$$

$R_2(q_1)$ je analyticky vyjádřené množstevní rozhodnutí následovníka vztažené k rozhodnutí vůdce. Vůdce ví, že takto se rozhodne následovník a s tímto vědomím volí jeho optimální strategii.

$$
\begin{aligned}
[q_1 \geq 0] \ \ max \ \ u_1(q_1, R_2(q_1)) = \quad & max \ \ q_1[M - q_1 - R_2(q_1) - c] \\
& max \ \ q_1(M - q_1 - c)/2
\end{aligned}
$$

$$f(q_1) = \frac{1}{2}q_1 M - \frac{1}{2}q_1^2 - \frac{1}{2}q_1 c$$

$$\frac{1}{2}M - 2\frac{1}{2}q_1 - \frac{1}{2}c = 0$$

$$M - 2q_1 - c = 0$$

$$q_1^* = \frac{M-c}{2}; \quad q_2^* = R_2(q_1^*) = \frac{M-c}{4}$$

Ekvilibrium je $q^* = (q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{M-c}{2}, \frac{M-c}{4}\right)$.

Pokud tedy vůdce dodá na trh jiné (např. větší) množství než $\frac{M-c}{2}$, rozhodně jeho zisk bude nižší. Jako domácí cvičení toto prověřte. To samé platí pro následovníka. Následovník ovšem má vždy možnost volit BR a tuto volbu táhnout.

Modely oligopolu

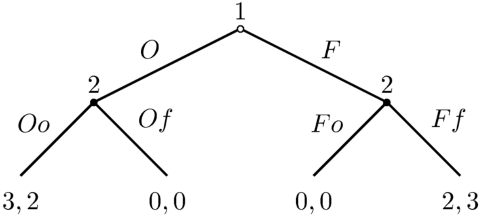
Známe již tři pohledy na věc:

- Cournot – oligopol v množstevních strategiích, statická hra.
- Bertrand – oligopol v cenových strategiích, statická hra.
- Stackelberg – oligopol v množstevních strategiích, sekvenční hra.

Dnes víme, že se hráči nenechají strhnout k cenové hře, která může vést k *cenové válce*. Po cenové válce je totiž rozložení vlivu na trhu přibližně podobné, jako na začátku, pouze hráči méně tržní.

Princip zpětné indukce

Pedro/Juana	Opera	Fotbal
Opera	3,2	0,0
Fotbal	0,0	2,3



Pedro táhne první. Ví, že Juana zvolí BR. Proto se podívá, co by byly ty BR (Oo, Ff). Z možností (Oo,Ff) volí Oo.
Čím to, že je tu naprosto jasné unikátní PNE?

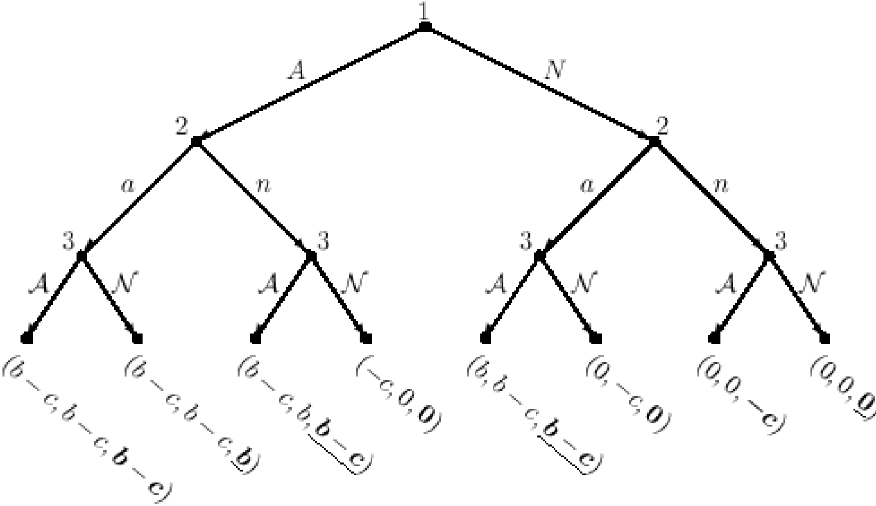
Pořadí tahů

Je výhodné táhnout první?

Příklad s poslanci: Poslanci chtějí odhlasovat zákon o zvýšení svých platů. Zvýšení přinese každému poslanci individuální užitek $b \geq 0$, ovšem poslanec hlasující "pro" sníží u věřejnosti svou popularitu, což odpovídá ztrátě $c \geq 0$ (naštěstí $b > c$). Poslanci jsou tři, k odhlasování zákona potřebujeme dva hlasy pro. K hlasování přistupují sekvenčně a hlasování je veřejné. Kdo půjde první?

- Člověk bez znalosti THE by se možná ostýchal jako první hlasovat o tak choulostivé věci veřejně.
- Je evidentní, že zákon projde.
- Pokud budu mít to štěstí, že budu moci jít hlasovat první, radostně budu hlasovat "proti" s přidáním nějaké zásadní řeči o nestoudných mzdových požadavcích některých poslanců.

Pořadí tahů


1
A
N
2
2
a
n
a
n
3
3
3
3
A
N
A
N
A
N
A
N
(b − c, b − c, b − c)
(b − c, b − c, b)
(b − c, b, b − c)
(−c, 0, 0)
(b, b − c, b − c)
(0, −c, 0)
(0, 0, −c)
(0, 0, 0)

Studie v diskrétních strategiích

Mějme kolonii K a imperialistu I. Kolonie má na svém území ropný vrt, který nese 4 jednotky zisku. Navíc kolonie platí 2 jednotky daní imperialistovi.

- Kolonie má strategie $S_K = \{R, C\}$, revoltovat (R) nebo pokračovat v poddanství (C).
- V případě, že kolonie bude revoltovat, imperialista může povolit kolonii nezávislost (G) nebo revoluci potlačit (S) – způsobil by válku.
- V případě, že kolonie bude poslušně pokračovat, imperialista může vybírat daně (T) nebo zrušit daně (E).
- $p \in \langle 0, 1 \rangle$ nechť je pravděpodobnost, že by kolonie vyhrála válku za nezávislost.

Studie: kolonie versus imperialista

Užitek ve hře:

- Ropa nese zisk 4 jednotky (tzn. 0 tomu druhému).
- Revoluce stojí 1, pokud imperialista nezakročí, jinak obě strany stojí 6 (válka).
- Daně nesou 2 jednotky imperialistovi (tzn. -2 kolonii).

Studujme zatím situaci formou statické hry. Imperialista má dvě sub-rozhodnutí, které v rámci strategie ve statické hře musíme sloučit: $\{G, S\} \times \{T, E\} = \{GT, GE, ST, SE\}$.

Studie: kolonie versus imperialista

K/I	GT	GE	ST	SE
R	$3,0$	$3,0$	$-6+4p-2(1-p)$, $-6+6(1-p)$	$-6+4p$, $-6+4(1-p)$
C	$-2,6$	$0,4$	$-2,6$	$0,4$

Strategický rozbor situace, pro různá p:

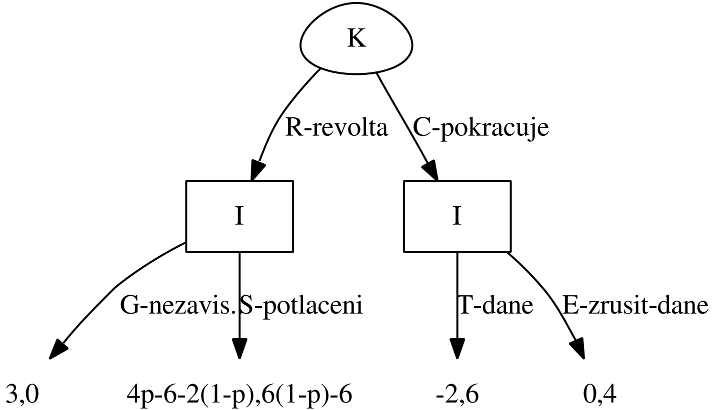
K/I $p=0$	GT	GE	ST	SE
R	$3,0$	$3,0$	$-8,0$	$-6,-2$
C	$-2,6$	$0,4$	$-2,6$	$0,4$

K/I $p=1$	GT	GE	ST	SE
R	$3,0$	$3,0$	$-2,-6$	$-2,-6$
C	$-2,6$	$0,4$	$-2,6$	$0,4$

Se zvyšujícím se p se evidentně zvětšuje nutkání (incentive) kolonie k rebelii (a současně imperialista racionalně volí podporu nezávislosti).

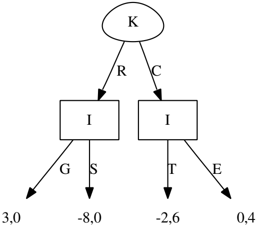
Kolonie versus imperialista: Dynamický přístup

Statický přístup není přirozený (navrhuje ekvilibria, která jsou sekvenčně iracionální). Hru velmi dobře rozhodne sekvenční přístup.

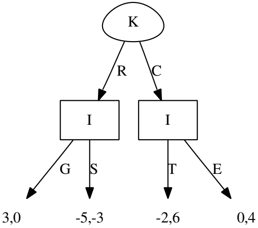


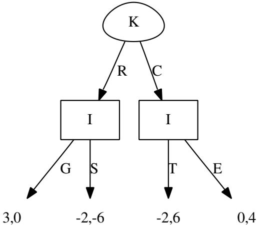
Kolonie versus imperialista: Dynamický přístup

$p = 0$



$p = \frac{1}{2}$





$p = 1$

Důveryhodná/nedůveryhodná hrozba

Credible/Incredible threat.

Uvažujme situaci, kdy hráč A přijde k hráči B s tím, že má bombu a pokud mu B nedá jistý obnos (nemá smysl zkoumat jeho výši), tak bombu odpálí (způsobí smrt A i B).
Hráč B očekává u A racionalitu a zkoumá, zda-li je hrozba "odpálit" důvěryhodná. Očekává, že A je racionální (dá přednost životu). Pak nemá smysl hrát strategii "Odevzdat". Paradoxně, většina lidí však peníze zaplatí.

Nedůvěryhodnou hrozbu hráč ohlašuje (signalizovat), pokud doufá, že ji nebude muset naplnit. Aby se hrozba stala důvěryhodnout, hráč mnohdy sobě způsobí škodu (pálení lodí).

Důveryhodná/nedůveryhodná hrozba

A/B	left	right
top	2,1	0,0
bottom	1,2	1,2

- PNE: (top,left), (bottom, right)
- Ikdyž je right slabě dominovaná strategií left, přesto není iracionální. Tvoří hrozbu.
- Pokud sloupcový táhne jako první, pak volí left.
- Sekvenční chování může potlačit vliv hrozby.

Informace ve hře

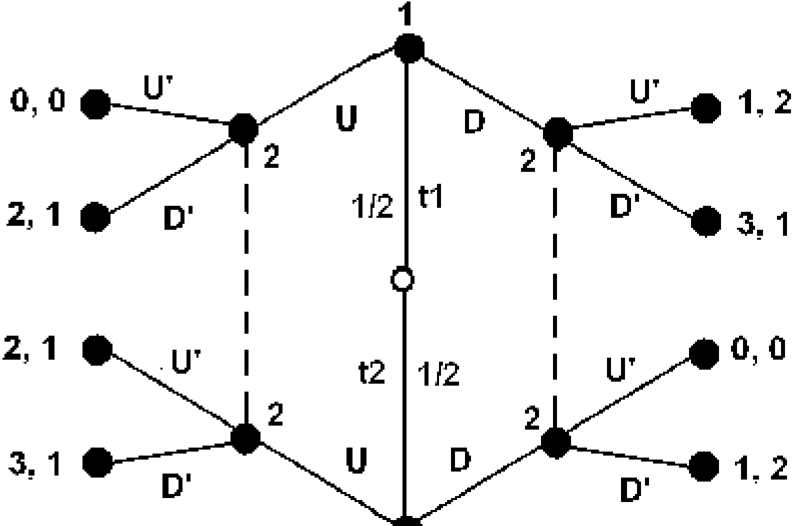
- Hry s úplnou/neúplnou informací (complete/incomplete) – hráčům je známa struktura hry. Hra s nekompletní informací bývá také někdy definována jako hra, kde první tah má příroda (příp. bůh) a hráči tento tah neznají.
- Hry s dokonalou/nedokonalou informací (perfect/imperfect) – hráčům je známa historie hry.
- Nás budou zajímat hry s úplnou informací.
- Dále budeme zkoumat perfektnost/imperfektnost informace.

Historie znamená informaci o aktuálním uzlu ve stromu hry. Pokud je znalost uzlu jistá (informační množina je jednoprvková – singleton), pak je perfektní informace. Nejistotu modelujeme víceprvkovou informační množinou.

Perfect recall – hráč je schopen si pamatovat vlastní tahy.

Informace ve hře - hra s nedokonalou informací

Prázdné kolečko uprostřed, první táhne příroda a volí typ hráče 1.



Definice sekvenční hry (Extensive Form Game)

Definition

Konečná sekvenční hra s perfektní informací Γ^E je čtveřice (Q, H, p, U), kde:

- Q je množina hráčů,
- H je množina historií (kontextů, uzlů). H^T označuje množinu terminálních historií. $H^0 = \emptyset$ označuje počáteční uzel.
- $p(h) : H \setminus H^T \to Q$ přiřazuje každé neterminální historii h hráče, který je aktuálně na tahu.
- U je vektor užitkových funkcí $U_i(h) : H^T \to \mathbb{R}^1$ pro všechny $i \in Q$.

Pozn.: Mininum pro definici hry s perfektní informací je (Q, H, p).
Pozn.: Zavedeme: $A(h)$ je množina akcí pro každé $h \in H \setminus H^T$, tzn. množina proveditelných akcí po dosažení historie h.

Co je ta historie?

Budeme chtít vyjádřit, že hráč neví, v jakém stavu (uzlu) stromu je.

- Historie $h \in H$ je sekvence akcí $(a_k)_{k=1,\dots}$, kde každá akce a_j představuje tah hráče
- Prázdná sekvence je H^0, počátek hry.
- Je-li $(a_k)_{k=1,\dots,K} \in H$ $(K \in \mathbb{N})$ a $L < K$, pak $(a_k)_{k=1,\dots,L} \in H$.
- Každý prvek $h \in H$ se nazývá historie, každá složka h se nazývá akce.

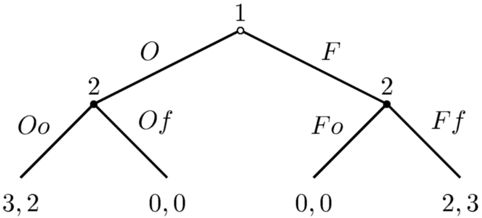
Množina H dává představu o způsobu hraní hry, je to množina všech cest od počátku k libovolnému uzlu stromu hry. Předpokládáme tedy, že v $h = (a_k)_{k=1,\dots,K}, j \in \{1, \dots, K\}$ táhl v j-tém okamžiku hráč $p(h')$ akci a_j, kde $h' = (a_k)_{k=1,\dots,j-1}$.

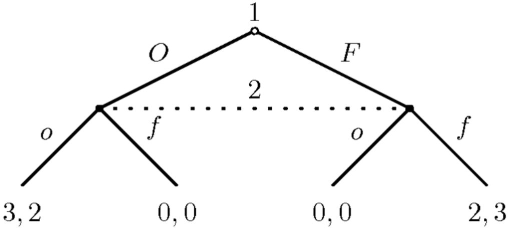
Co je ta historie?

- Je-li H konečná množina, je i příslušná hra konečná.
- Je-li nejdelší prvek $h \in H$ konečně dlouhý, má hra konečný horizont.
- Je-li h historií délky k, pak (h, a) je historií délky $k + 1$. Skládá se pak z h následovaného a.
- Z toho plyne definice $A(h) = \{a|(h, a) \in H\}$.

Zpětná indukce může být použita pouze na konečné hry.

Informační množiny typu $I \subseteq H \setminus H^T$



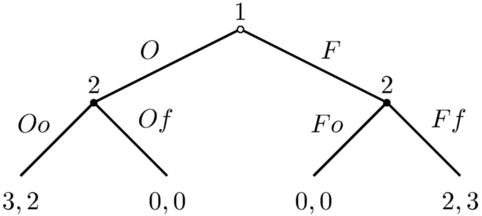


Informační množiny typu $I \subseteq H \setminus H^T$

Mějme rozklad (relace, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní) na množině $H \setminus H^T$, tzn. množinu množin, které dohromay tvoří $H \setminus H^T$.

- Jednu informační množinu budeme označovat I.
- Z principu relace "rozklad na množině" plyne, že každá $h \in H$ je právě v jedné množině rozkladu.
- je-li $h \in I$, pak je hráč $p(h)$ nejistý, zda-li je v uzlu h nebo v jiném $h' \in I$.
- $\forall h, h' \in I : p(h) = p(h')$.
- jsou-li všechny I jednoprvkové, pak je hra s dokonalou informací (perfect information), jinak nedokonalou (imperfect)

H, I



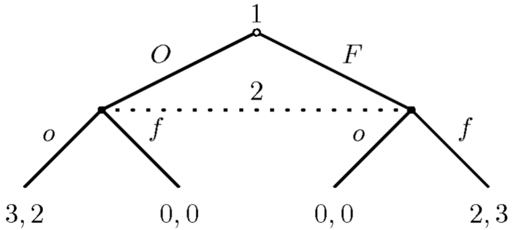
$$H = \{(), (O), (F)\} \cup H^T$$

$$H^T = \{(O, o), (O, f), (F, o), (F, f)\}$$

$$p(()) = 1, p((O)) = p((F)) = 2, A(()) = \{O, F\}$$

$$Is = \{\{\emptyset\}, \{O\}, \{F\}\}$$

H, I



$$Is = \{\{\emptyset\}, \{O, F\}\}$$

Pozn.: Hráč 2 ve svém okamžiku tahu neví, co hrál protivník (v jakém je on uzlu). Fakticky to odpovídá situaci hry v normální formě.

Definice sekvenční hry: co je strategie?

V sekvenčních hrách je strategií kompletní plán hry od počáteční historie (počátku) až po terminální historii. Tedy, je to celá cesta stromem až po listový uzel. Tady je zřejmá převoditelnost se statickými hrami.

Definition

Mějme hru Γ^E. Nechť $H_i = \{h \in H | p(h) = i\}$. Množina strategií hráče $i \in Q$ je dána

$$S_i = \times_{h \in H_i} A(h)$$

Strategický profil, převod na statickou hru

Strategický profil definujeme obvyklým způsobem jako $s \in S, S = \times_{i \in Q} S_i$.

Pro každou sekvenční hru $\Gamma^E = (Q, H, p, U)$ můžeme definovat statickou hru $\Gamma^S = (Q^s; (S_i^s); (U_i^s))$ tak, že

- $Q^s = Q$
- $S_i^s = S_i, \forall i \in Q$
- $U_i^s(s) = U_i(h), s \in S^s$ a h je historie odpovídající postupnému provedení sekvenční hry se strategiemi hráčů $(s_i)_{i \in Q}$.

Nashovo ekvilibrium

Bez většího překvapení definujeme Nashovo ekvilibrium v sekvenční hře:

Definition

Mějme sekvenční hru s dokonalou informací Γ^E. Strategický profil s^* nazveme Nashovo ekvilibrium, pokud platí pro všechny hráče $i \in Q$:

$$U_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq U_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$$

Bylo už řečeno, že NE v sekvenčních hrách nedává dobré výsledky.

Zermelův teorém

Theorem

Každá konečná hra dokonalé informace má PNE, které je dosažitelné zpětnou indukcí.
Pokud žádný hráč nemá v žádných dvou terminálních historiích stejné užitky, je ve hře pouze jedno PNE.

Podhra, subgame

Chceme vyšetřovat podstromy sekvenční hry. Za jistých okolností se lze koncentrovat na podhru a vyřešit tuto část odděleně od zbytku hry (je to základ backward induction).

Definition

Podhra zadané sekvenční hry s dokonalou informací Γ^E ve stavu h je sekvenční hra s dokonalou informací $\Gamma^E(h) = (Q, H|_h, p|_h, U|_h)$, kde

- $H|_h = \{h' \in H | (h, h') \in H\}$
- $p|_h(h') = p(h, h')$ pro každou $h' \in H|_h$.
- $U|_h(h') = U(h, h')$ pro každou $h' \in (H^T \cap H|_h)$.

Ze stromu hry vyextrahuju podstrom začínající historií h. Ve hrách s nedokonalou informací bude definice podhry složitější.

Subgame Perfect Nash Equilibrium (SPNE)

Reinhard Selten, 1975, IJGT (International Journal on Game Theory)

Definition

Mějme sekvenční hru s dokonalou informací Γ^E. Strategický profil s^* nazveme úplný rovnovážný bod (SPNE), pokud pro každého hráče $i \in Q$ a každou historii $h \in H \setminus H^T$, kde $p(h) = i$ platí

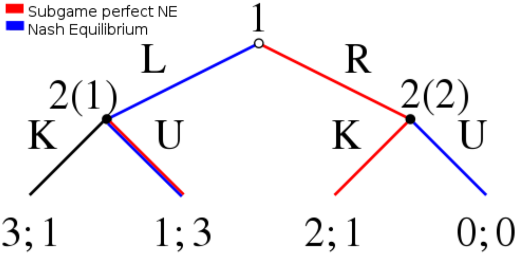
$$U_i|_h(s_i^*|_h, s_{-i}^*|_h) \geq U_i|_h(s_i|_h, s_{-i}^*|_h)$$

pro všechny strategie $s_i|_h$ hráčů i v podhře $\Gamma^E(h)$.

Jinak řečeno, profil s^* je SPNE, pokud zvítězí jako NE v každé podhře hry. SPNE je refinement (zpřesnění) NE.

Příklad SPNE

Uvažujme hru, kde druhý hráč signalizuje hrozbu, že pokud první zahraje R, tak on zahraje U. Současně vidíme dvě PNE $((L, UU), (R, UK))$ a zjemnění na SPNE.



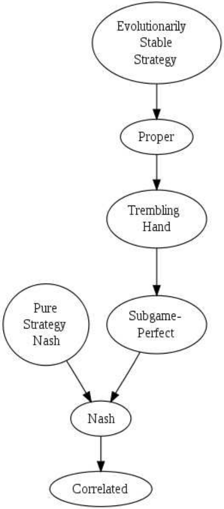
	(K,K)	(K,U)	(U,U)	(U,K)
L	3,1	3,1	1,3	1,3
R	2,1	0,0	0,0	2,1

Existence SPNE

Theorem

Každá konečná sekvenční hra má SPNE. Navíc, pokud žádný hráč není indiferentní mezi libovolnými dvěma terminálními historiemi, pak je SPNE unikátní.

Solution Concepts



SPNE ve hrách s kompletní, ale nedokonalou informací

- Uvažujme, že hra má nedokonalou informaci, tzn. existuje informační množina, která je víceprvková (obsahuje víc historií) tak, že daný hráč neví, v jakém konkrétním uzlu se nachází.
- Neplatí to nejspíš pro všechny uzly a historie, takže máme informační hybrid – v některých uzlech má hráč jistotu, v některých ne.
- Pokud hráč čelí nejistotě ve všech uzlech (okamžicích tahu), pak je hra ekvivaletní se statickou hrou.
- Koncept SPNE je uplatnitelný, musíme však modifikovat definici podhry pro situaci hry s kompletní, ale nedokonalou informací.

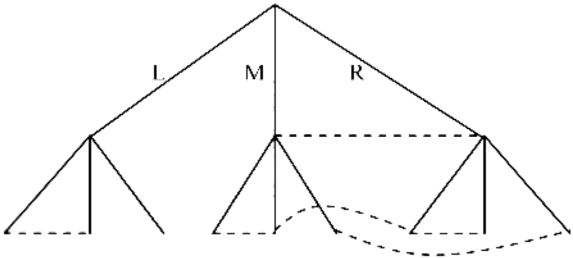
Podhra ve hře s kompletní, ale nedokonalou informací

Podhra je opět hra v rozšířené formě $\Gamma^E(h)$. Musí platit:

- Musí začínat v uzlu (historii), která je v jednoprvkové informační množině.
- Obsahuje všechny uzly následující tento počáteční uzel a žádné jiné.
- Nenarušuje žádnou informační množinu. Pokud jsou dvě historie h a h' v jedné informační množině, pak jsou spolu i v podhře.

Podhra ve hře s kompletní, ale nedokonalou informací

Tři hráči, každý má strategie $\{L, M, R\}$. Hráč 1 má jednu informační množinu, hráč 2 má dvě – $\{\{(L)\}, \{(M), (R)\}\}$, hráč 3 má čtyři informační množiny.



Hra má tedy tři podhry: 1) originální hra, 2) podhra tvořená historií (L), 3) podhra tvořená historií (L, R)

Opakované hry

- Opakovaná hra je případ hry v rozšířené formě (sekvenční hry), která sestává z konečného/nekonečného opakování tzv. základní hry (stage game).
- V opakovaných hrách (specificky v těch nekonečně opakovaných) je racionální hrát *společensky optimální profil*, který se může značně lišit od NE.
- V opakovaných hrách s konečným (a předem známým) počtem opakování je racionální hrát v poslední hře NE a v průběhu ten koncept (NE, sociálně optimální profil), který je výhodnější s vědomím budoucího opakování hry. (př. chain-store paradox)
- Konečně-opakované hry lze řešit zpětnou indukcí.

Příště

- Kooperativní hry a vyjednávání.
- Opakované hry a Korelované ekvilibrium.
- Mechanism design.