THE: Smíšené Nashovo ekvilibrium v nekooperativních hrách
(Mixed Nash Equilibrium in Non-cooperative Games)
Intermezzo I.

Martin Hrubý

Brno University of Technology
Brno
Czech Republic

October 12, 2010

Úvod

- Navazujeme na přednášku o nekooperativních hrách.
- Je potřeba důkladněji pochopit smíšenost ve strategiích hráčů.
- Naznačit analytický postup výpočtu MNE v jednoduchých hrách.

Rozhodování jedince za jistoty

Rozhodnutí v:

volba	a	b	c	d
zisk	10	20	30	40

Rozhodnutí v:

volba	a	b	c	d
zisk	10	20	40	40

Hráč je indiferentní mezi c a d, tzn. rozhoduje se náhodně podle pravděpodobnostní distribuce $(0, 0, 0.5, 0.5)$.

Pochopení nutnosti náhodně se rozhodnout může být pro jedince značný problém (osel a dvě otýpky sena).

Je distribuce $(0, 0, 0.4, 0.6)$ projevem indiference mezi c a d? Jak tuto situaci interpretujeme? Jak by mohla vzniknout?
... ve hrách tato situace může vzniknout

Smíšené strategie ve hrách

$$MNE = (s_1^*, s_2^*) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)\right)$$

- Smíšená a ryzí strategie.
- Kolik je ryzích strategií v konečné hře? Kolik je tam smíšených strategií?
- Co znamená výše zmíněné MNE z pohledu rozhodování řádkového hráče?
- Hráč (např. řádkový) je v MNE indiferentní vůči všem svým ryzím strategiím, kterým toto MNE přiřazuje nenulovou pravděpodobnost.
- ... tzn. všechny jsou BR na např. s_2^*

Smíšené rozšíření hry v normální formě

Definition

Mějme hru $\Gamma = (Q; \{S_i\}_{i \in Q}; \{U_i\}_{i \in Q})$.
Hru $\Gamma^m = (Q; \{\Delta_i\}_{i \in Q}; \{\pi_i\}_{i \in Q})$ nazveme smíšeným rozšířením hry Γ, pokud $\forall i \in Q$:

- Δ_i je množina smíšených strategií hráče i (vektory délky $|S_i|$). $\sigma_i \in \Delta_i$. Číslo $\sigma_i(s_i)$ označuje pravděpodobnost přiřazenou ryzí strategii $s_i \in S_i$ ve strategii σ_i. Celkově $\Delta = \prod_i \Delta_i$.

$$\Delta_i = \left\{ \sigma_i \in \langle 0, 1 \rangle^{m_i} \mid \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1 \right\}; m_i = |S_i|$$

- Výplatní funkce hráče i

$$\pi_i(\sigma) = \sum_{s \in S} U_i(s) \cdot \left(\prod_{i \in Q} \sigma_i(s_i) \right)$$

NE ve smíšených strategiích – MNE (Mixed Nash Equilibrium)

Fakticky stejná definice jako pro PNE, ovšem se zavedením expected payoff (pouze zobecnění).

Definition

Mějme hru $\Gamma^m = (Q; \{\Delta_i\}_{i \in Q}; \{\pi_i\}_{i \in Q})$. Smíšený profil $\sigma^* \in \Delta$ nazveme smíšené Nashovo ekvilibrium ve hře Γ^m, pokud platí pro všechny hráče $i \in Q$ a všechny možné smíšené strategie $\sigma_i \in \Delta_i$:

$$\pi_i(\sigma^*) \geq \pi_i(\sigma_i, \sigma^*_{-i})$$

Dále nebudeme zdůrazňovat, že smíšené ekvilibrium je definováno v Γ^m, ale implicitně ho budeme chápat jako možné řešení Γ.

Smysl a interpretace smíšených strategií

	a	b
c	3,2	1,3
d	-1,4	2,1

$$MNE = (\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right) \right)$$

- Jaké jsou ryzí $BR_1(\sigma^*_{-i})$?
- Říkáme, že s_i^* jsou vzájemně nejlepší odpovědi, hráči dosahují maximálního možného očekávaného zisku a nevyplatí se jim měnit strategii.
- Sloupcový je indiferentní vůči všem ryzím strategií, kterým s_2^* přiřazuje nenul. pravděpodobnost:
  - $\frac{3}{4}2 + \frac{1}{4}4 = \frac{6+4}{4} = \frac{10}{4}$
  - $\frac{3}{4}3 + \frac{1}{4}1 = \frac{9+1}{4} = \frac{10}{4}$
  - Očekávaný zisk sloupcového je $\frac{3}{4}\frac{1}{5}2 + \frac{3}{4}\frac{4}{5}3 + \frac{1}{4}\frac{1}{5}4 + \frac{1}{4}\frac{4}{5}2 = 2.7$
  - řádkový je na tom stejně $(\pi_1(s^*) = 1.4)$.

Smysl a interpretace smíšených strategií II.

	a	b
c	3,2	1,3
d	-1,4	2,1

$$MNE = (s_1^*, s_2^*) = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right) \right)$$

- Pokud by sloupcový hrál $(0, 1)$, pak je jeho očekávaný zisk: $\frac{3}{4}3 + \frac{1}{4}1 = 2.5$ (je horší než $\pi_2(s^*)$).
- Pokud by řádkový hráč získal dojem, že sloupcový bude hrát $(0, 1)$, pak je jeho BR hrát $(0, 1)$
- Stability to dosáhne až v s^*, kdy jsou oba hráči indiferentní mezi $\{a, b\}$, resp. $\{c, d\}$ a je pravděpodobné, že sloupcový zvolí b a řádkový c, kde dosáhnou užitku $(1, 3)$ (místo $(1.4, 2.7)$).

Poznámka: předváváme pouze demo-příklady. V reálných hrách je velikost *support* $< |S_i|$.

Výpočet smíšené rovnováhy - I.

	a	b
c	3,2	1,3
d	-1,4	2,1

p je pravděpodobnost hraní strategie a, tzn. $1-p$ je prst hraní b. Podobně q.
π_i je funkce v proměnných p a q, hledáme její extrém podle p, $\frac{\partial \pi_1}{\partial p}$.

$$\pi_1 = 3pq + 1p(1-q) - 1(1-p)q + 2(1-p)(1-q) = 5pq - p - 3q + 2$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p} = 5q - 1 \Rightarrow q = \frac{1}{5}$$

$$\pi_2 = 2pq + 3p(1-q) + 4(1-p)q + (1-p)(1-q) = -4pq + 2p + 3q + 1$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q} = -4p + 3 \Rightarrow p = \frac{3}{4}$$

Výpočet smíšené rovnováhy II.

	a	b
c	3,2	1,3
d	-1,4	2,1

Vycházíme z poznání indiference mezi a a b při hraní smíšené $(p, 1-p)$ versus smíšené $(q, 1-q)$.

Pak pro řádkového hráče vychází užitek:
$U_1(c,a) \cdot q + U_1(c,b) \cdot (1-q) = U_1(d,a) \cdot q + U_1(d,b) \cdot (1-q)$
$3q + 1(1-q) = -1q + 2(1-q)$
$3q = -q + (1-q)$
$q = \frac{1}{5}$

Podobně sloupcový: $2p + 4(1-p) = 3p + (1-p) \Rightarrow p = \frac{3}{4}$

Smíšené rozšíření hry v normální formě

Připomeňme definici smíšeného Nashova ekvilibria (MNE):

Definition

Smíšený profil $\sigma^* \in \Delta$ je ekvilibrium ve hře Γ^m, pokud platí pro všechny $i \in Q$:

$$\sigma_i^* \in BR_i(\sigma_{-i}^*)$$

$$BR_i(\sigma_{-i}) = arg \left[\max_{\sigma_i \in \Delta_i} \pi(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right]$$

Pozn.: Předpokládáme, že výsledkem operace $BR_i(\sigma_{-i})$ je podmnožina Δ_i. Množina Δ_i má jiný charakter než S_i! Z toho plyne.: hráč i je v kontextu sub-profilu σ_{-i} indiferentní mezi všemi $\sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$.

Věta o existenci Nashova ekvilibria

Theorem

Každá konečná hra má vždy alespoň jedno řešení ve smíšených strategiích.

John Nash (1950)

Theorem

Každá konečná hra má vždy lichý počet ekvilibrií (tzn. PNE+MNE).

Důsledek: pokud najdu ve hře pouze 1 PNE, je pouze 1 ekvilibrium. Pokud najdu 2 PNE, pak existuje *třetí* ekvilibrium, které je MNE (a bude nad těmi PNE ukazovat jejich váhu).

Dále ke smíšeným ekvilibriím

- Grafické řešení her.
- Důkaz věty o existenci MNE.
- Algoritmy řešení.
- Algoritmická složitost řešení výpočtu MNE.