

Doprovodné texty ke kurzu Teorie her

Martin Hrubý
Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

zimní semestr, akad. rok 2010/11

Contents

1	Evoluční teorie her	3
1.1	Příklad Jestřávi a Hrdličky (Hawks and Doves)	4
1.2	Evolučně stabilní strategie	5
1.3	Příklad včely	6
1.4	The Logic of Animal Conflict	7
1.4.1	Konflikty mezi jedinci, kteří si nejsou schopni způsobit vážné zranění	10
1.5	Dynamika v Evoluční teorii her	11
1.6	Vztah Nashova ekvilibría a ESS	13

Chapter 1

Evoluční teorie her

Základy Evoluční teorie her položili pánové John Maynard Smith a George R. Price ve svém článku *The Logic of Animal Conflict* uveřejněném v roce 1973 v prestižním časopise *Nature*. Definovali tak zvanou evolučně stabilní strategii (ESS) jako strategii, kterou když přijme většinová populace, pak je tato populace imunní vůči případnému mutantovi. Ukázali, že strategický profil tvořený hraním ESS je zpřesněním (refinement) Nashova ekvilibria a tím bodem rovnováhy v populaci.

Populací rozumíme dostatečně velkou množinu jedinců stejného druhu. Obvykle předpokládáme – a je to velmi zjednodušující předpoklad, že se jedinci rozmnožují asexuálně, tedy netvoří pro rozmnožování páry. Strategická interakce je dále zjednodušena na posloupnost dvouhráčových her, které proti sobě hrají vždy dva náhodně vybraní jedinci populace.

Základem pochopení evoluční teorie her je pochopení pojmu strategie v kontextu evoluce. V předchozím studiu her jsme chápali strategii jako jednu z možných akcí, které hráč ve hře může provést a problémem hry bylo hráčovo strategické rozhodnutí o volbě jeho akce ve hře. V opakovaných hrách jsme odlišovali strategii hráče v bázové hře, tzn. té elementární hře, která se v opakované hře opakuje. Dále jsme pak zavedli strategii v opakované hře jako hráčovu koncepci chování v rámci celé existence opakované hry, jako například "budu vždy hrát..." nebo "budu hrát C dokud hráč bude hrát C, potom přejdu na D...". Se strategií v evolučních hrách je to podobné.

Podle evolučních biologů každý jedinec zastupuje určitý fenotyp chování. Každý jedinec je chodící schránka, která v sobě nosí genetickou informaci, která dává obecný vzorec jeho přístupu k různým životním situacím. Při troše filosofického odstupu od dosavadního zkoumání rozhodovacích situací můžeme prohlásit, že za nás rozhodují naše geny. Pokud je někdo chronický cholerik, pak obvykle přijímá jistá rozhodnutí. Pokud je někdo idealista, může mít větší sklony ke kooperaci. Takto bychom mohli pokračovat. Pod pojmem strategie v evolučních hrách proto budeme v této kapitole rozumět obecný popis charakteru jedince. Jedinec tudíž reprezentuje svou evoluční strategii celoživotně stejnou a rodí se s ní. Je to jeho charakterová vlastnost. Nás bude zajímat, zda-li je nějaký konkrétní vzorec chování vhodnější pro přežití v populaci než jiný. Evolučí by měl totiž vykristalizovat v populaci takový vzorec chování, aby populace těchto jedinců měla předpoklady k imunitě

vůči vpádu malého množství mutantů do populace – tzn. jedinců s odlišným vzorcem chování nebo jinou výbavou k přežití.

1.1 Příklad Jestřávi a Hrdličky (Hawks and Doves)

Představme si populaci tvořenou dvěma fenotypy – jestřáby (Hawks) a hrdličkami (Doves). Nejedná se o konkrétní živočišné druhy, ale o vzorce chování. Jestřáb je prototyp nelítostného dravce, který vždy bojuje do konečného stavu, kdy je buď zničen on nebo protivník. Hrdlička naopak hrozí jen velmi symbolicky a je-li napadena jestřábem, vždy z boje uteče. Pokud ji tedy jestřáb při prvním útoku okamžitě nezabije, hrdlička se vždy zachrání útekem.

Na obrázku 1.1 vidíme užítky vyplývající z interakce možných dvou těchto fenotypů. Užitek V modelujeme přínos z vítězství. Může to být hodnota potravy nebo jiných zdrojů, o které jedinci bojují. Záporným užitek C modelujeme ztrátu spojenou s vážným zraněním v boji. Lze předpokládat, že vážné zranění jedince pro něj fakticky znamená smrt nebo značné znevýhodnění v dalším životě a soubojích.

Pokud se potká jestřáb s jestřábem, je rovnoměrně rozložen užitek mezi oba, čímž modelujeme, že jeden z nich vždy přežije a druhý je vážně zraněn. Podobně je to u setkání dvou hrdliček, kde opět zvítězí pouze jedna, ale konflikt se obejde bez zranění. Konflikt hrdličky a jestřába vždy vede ke snadnému vítězství jestřába a útěku hrdličky.

	Hawk	Dove
Hawk	$\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}$	$V, 0$
Dove	$0, V$	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$

Figure 1.1: Hra Hrdličky a Jestřábi

Co lze o této bázové hře říci? Strategie Dove není ESS, protože populaci hrdliček může napadnout jeden mutant (jestřáb), který pak v ní bude velmi dobře prosperovat. Navíc snadno poznáme, že profil $(Dove, Dove)$ není Nashovo ekvilibrium. Toto lze o situaci zjistit bez znalosti velikosti rozdílu $V - C$.

Je-li tedy $V > C$, pak je ESS být jestřábem. Pokud vám to připadne neuvěřitelné, dosaďte za $V = 10$ a $C = 9$. Dostaneme se ke hře na obrázku 1.2 s očekávanými užítky hráčů (tzn. profil $(5,5)$ neznamena rozdělení zisku pro oba, ale očekávání obou v této situaci). Pokud by tedy společnost tvořily pouze hrdličky, docházelo by k symbolickým soubojům a šance na úspěch jednotlivce by byla 50 procent bez obavy ze zranění. Příchod mutanta jestřába by tuto společnost okamžitě zlikvidoval a populace by se rychle přerodila geneticky z fenotypu hrdlička na fenotyp jestřáb. Proto je jestřáb v kontextu fenotypů hrdlička–jestřáb tou evolučně stabilní strategií. Ovšem pouze v tomto kontextu.

Míra rozdílu $V \gg C$ určuje i brutalitu soubojů jedinců charakteru jestřáb, jak ukazuje příklad rypouše sloního. Vedoucí samec rypouše sloního má přístup ke všem samicím, ovládá teritorium a zdroje. Souboje mezi rypouši jsou proto velmi ostré.

	Hawk	Dove
Hawk	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	10, 0
Dove	0, 10	5, 5

Figure 1.2: Hra Hrdličky a Jestřábi, $V = 10$ a $C = 9$

Na závěr kapitoly o hrdličkách a jestřábech ukážeme, že jestřáb (H) je skutečně unikátní ryzí ESS ve hře v situaci, kdy $V > C$. Uvažujme smíšenou strategii $t = (p, 1 - p)$, která s pravděpodobností $p \in \langle 0, 1 \rangle$ hraje H. Víme, že $U(H|H) = \frac{V-C}{2}$. Pak

$$U(t|H) = p \frac{V-C}{2} + (1-p)0 < \frac{V-C}{2}$$

tedy $U(H|H) > U(t|H); \forall t \neq H$, tzn. $\forall t \neq (1, 0)$.

1.2 Evolučně stabilní strategie

Definice 1. ESS je strategie taková, že pokud ji přijme většina populace, pak neexistuje mutantská strategie, která by byla reprodukčně úspěšnější.

(Smith and Price, 1973)

Mějme nekonečně velkou (velikost je tedy dostatečná a není limitující) populaci jedinců, kteří se množí asexuálně. Jedinci se navzájem střetávají po dvojicích, tedy hrají nekooperativní hry dvou hráčů (tzv. vnitřní nebo bázová hra).

Předpokládejme, že bázová hra $\Gamma = (\{A, B\}; S_s; U)$ je symetrická. Užitek $U(s|t)$ čteme jako užitek hráče hrajícího strategii s proti protivníkově strategii t . Pojmem $\Delta(S_s)$ budeme rozumět smíšené rozšíření S_s .

Definice 2. Strategie $I \in S_s$ je evolučně stabilní, pokud pro každou strategii $J \in S_s, J \neq I$ platí:

$$U(I|I) > U(J|I) \quad \text{nebo} \\ U(I|I) = U(J|I) \quad \wedge \quad U(I|J) > U(J|J)$$

První část definice říká, že hráč dosáhne lepšího užitku, pokud proti hráčově strategii I hraje I , než kdyby hrál J . Hrát I je tedy best-response na protivníkově hraní I .

Pokud by přesto platilo $U(I|I) = U(J|I)$, tzn. na protivníkově I je stejně dobré hrát I i J , pak je I evolučně stabilní pouze tehdy, pokud hráč jasně cítí, že proti případnému mutantovi hrajícímu J bylo striktně lepší hrát I .

Věta 1. Je-li I ESS, pak (I, I) je NE.

Tato věta říká, že profil tvořený ESS strategiemi je Nashovým ekvilibriem, tzn. rovnovážným stabilním chováním v populaci. Větu si dokážeme v závěru, až zavedeme dynamiku v evoluci populace.

Jiná definice (předpokládá výskyt mutanta s četností ϵ):

Definice 3. Strategie s je ESS pro dvouhráčovou symetrickou hru $\Gamma = (Q; S_s; U)$, jestliže pro každou $t \neq s$, existuje ϵ_t takové, že pro každé ϵ , $0 < \epsilon < \epsilon_t$, platí

$$(1 - \epsilon)U(s|s) + \epsilon U(s|t) > (1 - \epsilon)U(t|s) + \epsilon U(t|t)$$

Četnost ϵ_t chápeme jako maximální možnou četnost mutantů. Předpokládáme, že mutant je nositel strategie t a zbytek populace přemýšlí, zda-li hrát s nebo t . Pak je s evolučně stabilní, pokud je jedinec populace vnímá svůj užitek při hraní s ostře lepší než kdyby hrál t , a to s pravděpodobností $(1 - \epsilon)$ proti standardnímu jedinci populace nebo s pravděpodobností ϵ proti mutantovi.

1.3 Příklad včely

Předpokládejme populaci včel a možné dva typy včel: malé včely (small) a velké včely (large). Velká včela má větší sílu než malá a v případných konfliktech o potravu malou včelu přepere. Situaci lze demonstrovat na následující báze hře:

	Small	Large
Small	5,5	1,8
Large	8,1	3,3

Která ze strategií (malá včela, velká včela) může být evolučně stabilní? Předpokládejme nejdříve, že je ESS být malá včela (Small). Četnost mutanta, tedy velké včely vyjádříme proměnnou $\epsilon \in \langle 0, 1 \rangle$. Četnost malých včel vyjádříme jako doplněk, tedy $(1 - \epsilon)$. Pak je očekávaný užitek malé včely:

$$5(1 - \epsilon) + 1 \cdot \epsilon = 5 - 4\epsilon$$

což znamená, že malá včela (řádkový hráč) s pravděpodobností $(1 - \epsilon)$ potká malou včelu v souboji a její užitek je dán výstupem $(5, 5)$, tedy $5 \cdot (1 - \epsilon)$. S pravděpodobností ϵ potká velkou včelu (jako sloupcového hráče) a proto obdrží $1 \cdot \epsilon$.

Užitek velké včely jako řádkového hráče je v tomto systému (stejně četnosti):

$$8(1 - \epsilon) + 3 \cdot \epsilon = 8 - 5\epsilon$$

Když porovnáme očekávané užisky malé včely $5 - 4\epsilon$ a $8 - 5\epsilon$ velké včely, je vidět, že pro dostatečně malé ϵ (mutanta očekáváme s malou četností výskytu) je lepší být velká včela než malá,

tzn. Small není ESS. Proto by populace malých včel nebyla imunní vůči mutantovi, tzn. velké včele a případná strategie "velká včela" by v populaci převážila tak, že by byla většinová.

Nyní předpokládejme, že je ESS být velká včela (Large). Pak je očekávaný užitek malé včely

$$(1 - \epsilon) + 5 \cdot \epsilon = 1 + 4\epsilon$$

a velké včely:

$$3(1 - \epsilon) + 8 \cdot \epsilon = 3 + 5\epsilon$$

Lze ukázat, že pro dostatečně malé ϵ je lepší být velká včela než malá, tzn. Large je ESS. Velké včely jsou tedy vývojově dalším stupněm včelstva až do okamžiku, kdy se v populaci velkých včel vyskytne nová mutace.

1.4 The Logic of Animal Conflict

Článek *The Logic of Animal Conflict* autorů Smithe a Price byl počátkem Evoluční teorie her jako oboru v rámci Teorie her. Přinesl definici evolučně stabilní strategie a několik zajímavých úvah, které si v této kapitole rozebereme.

Konflikty mezi jedinci v rámci jednoho druhu mohou vést ke zvýhodnění vítěze, jako například získání loveckého teritoria, samičky slibující zdravé potomstvo, získání okamžité potravy a podobně. Mohlo by se zdát, že evoluce vyvine schopnosti (a pudy) jedinců k totálnímu zlikvidování protivníka, které autoři nazývají schopnostmi pro zničující válku – "total war". Paradoxně evoluce vyvinula schopnosti slabé. Obvykle se konflikt odehraje na úrovni rituálů a vzájemné demonstrace síly, tedy pouze předvádění potenciálu k boji. Tyto způsoby konfrontace nazývají autoři "limited war". V přírodě mají jedinci obavu z vážného zranění, které jedinci v přírodě značně zkomplikuje život.

Příklady limited wars se vyvinuly do podob, kdy se například hadi jenom "přetahují" bez použití zubů, rohy beranů jsou zakroucené, psi na sebe dlouze vrčí a podobně. Proč se tedy protivníci nechtějí zlikvidovat? Proč jim to příroda komplikuje? Ono by to totiž vedlo k zániku takového příliš bojovného druhu. Predátor s postředy pro total war v přírodě existuje, ale pouze v takovém množství výskytu jedinců, kdy se tito nemusí každodenně přetahovat o zdroje. Populace jestřábího fenotypu by velmi rychle zanikla.

Předpokládejme dvě základní strategie hráče (jedince) v bázové hře, tedy v konkrétním souboji:

- Conventional (*C*) – cílem není vážně zranit soupeře, ale pouze ho informovat, že neustopíte.
- Dangerous (*D*) – cílem je vážně zranit soupeře. Jedná se o vážný útok, který s určitou pravděpodobností vede k vážnému zranění soupeře. K tomu skutečně může dojít, pokud bude strategie *D* v souboji uplatňována opakovaně.

U mnoha druhů je strategií C pouze předvádět hrozbu, předvádět svoji sílu, přetahovat se, bít se bez použití drápů a zubů a podobně. Ke strategiím souboje navíc dodáme strategii R (retreat), tedy ustoupit ze souboje s vědomím, že soupeř se automaticky stává vítězem.

V následujícím modelu Smithe a Price budeme stavět na těchto předpokladech o průběhu konfliktu:

- Hráči se v tazích střídají (sekvenční situace, opakovaně). V každém tahu hráč může zvolit C , D nebo R (utéct).
- Pokud zvolí D , je tu konstantní pravděpodobnost, že protivníka vážně zraní (ten pak vždy volí R).
- Pokud hráč zvolí R , je konec boje a protihráč se stává vítězem.

Mějme tedy ukázkou souboje dvou jedinců:

kolo	1	2	3	4	5	6	7	8
tah (I)	C	C	C	D	C	C	C	D
reakce (II)	C	C	C	D	C	C	C	R

Hráči se 3 kola oťukávají, pak ve 4. kole zahraje hráč I strategii D a hráč II odpoví D . Pár kol zase oťukávají. V osmém kole I zahraje D a II uteče. Hráč I je vítězem a nikdo není zraněn.

Zahrát D nebo D v reakci na C se nazývá provokace (probe, provocation). Provokace v prvním tahu se nazývá eskalace konfliktu (má konflikt přenést z C do D). Hráč odpovídající D na provokaci je odvetník.

Výsledkem souboje je nějaký zisk, který zohledňuje tři faktory do přínosu hráče v jeho reprodukčním procesu:

- Přínos z výsledku souboje, který porovnáváme se ztrátou v případě prohry.
- Ztráta z možného vážného zranění.
- Ztráta z investovaného času a energie v souboji.

Za strategii budeme považovat koncept chování hráče v souboji (jakoby jeho "mentalitu"). Smith s Pricem navrhli tyto základní fenotypy jedinců:

- Myš (mouse) – nikdy nehraje D , na tah D reaguje R ($D \Rightarrow R$). Jinak hraje C do konce.
- Jestřáb (hawk) – vždy hraje D . Pokračuje v D , dokud není vážně zraněn on nebo protivník.
- Násilník (bully) – pokud začíná, pak zahraje D . Jinak vždy $C \Rightarrow D$. Pokud protivník podruhé zahraje D , utíká (R).

- Odvetník (retaliator) – začíná s C, pak vždy $C \Rightarrow C$ (pokud ovšem počet kol přesáhne mez, hraje R). Pokud soupeř hraje D, pak s vysokou pravděpodobností $D \Rightarrow^H D$.
- Provokátér-odvetník (prober-retaliator) – pokud začíná nebo v reakci na C hraje: $C \Rightarrow^H C$ nebo $C \Rightarrow^L D$ (ovšem R, pokud se přesáhne mez počtu kol). Pokud zahraje D (provokace), pak v dalším kole hraje C, pokud protivník odpoví D. Jinak si troufne znova. Pokud protivník zahraje D, pak $D \Rightarrow^H D$.

Těchto 5 strategií dává 15 možných druhů zápasu ($\binom{5}{2} = 10$ kombinací dvou fenotypů plus 5 párů jednoho fenotypu proti sobě samému). Autoři provedli 2000 experimentů¹ pro každý druh zápasu a výsledky jednotlivých iterací zprůměrovali na odhady (simulačně získané) očekávaných zisků.

Dále předpokládejme nastavení klíčových pravděpodobností jevů takto:

- Vážné zranění hráče, pokud protihráč na něj zahraje D nastavme na 0.10. Akce D tedy nevede vždy ke zranění protivníka.
- Provokátér-odvetník zahraje D v prvním tahu nebo v reakci na C s pravděpodobností 0.05.
- Provokátér nebo Provokátér-odvetník zahraje D (pokud nedošlo ke zranění) v reakci na D s pravděpodobností 1.00.

Výsledky získané z modelu jsou pochopitelně velmi závislé na těchto nastavených parametrech a je věcí dalšího zkoumání, jak by se vývoj populace ubíral, kdyby například pravděpodobnost zásahu při hraní D byla výrazně vyšší než 10 procent.

Zisky z možných výsledků konfliktu nastavme takto:

- Vítězství hráče mu přinese zisk ve výši 60 (bodů).
- Vážné zranění způsobí zraněnému ztrátu -100 (bodů).
- Malé zranění po každém přijatém D, které nezpůsobilo vážné zranění (tzv. škrábnutí) způsobí zraněnému ztrátu -2 (body).
- Úspora času a energie při vyhnutí se zápasu: od 0 do 20 podle okamžiku R. Pokud hráč uteče v prvním kole, získává 20 bodů z úspory času a energie. Po dvacátém kole již nezíská nic.

Zisky ve hře jsou zobrazeny na obrázku 1.3. Tabulku je nutno číst tak, že při konfliktu myši s jestřábem – tedy v buňce (myš, jestřáb) získává myš 19.5 bodů a jestřáb (buňka (jestřáb, myš)) 80 bodů.

¹V té době (1973) se to považovalo za výpočetně náročný problém.

	Myš	Jestřáb	Násilník	Odvetník	Provokátér-o.
Myš	29.0	19.5	19.5	29.0	17.2
Jestřáb	80.0	-19.5	74.6	-18.1	-18.9
Násilník	80.0	4.9	41.5	11.9	11.2
Odvetník	29.0	-22.3	57.1	29.0	23.1
Provokátér-o.	56.7	-20.1	59.4	26.9	21.9

Figure 1.3: Tabulka zisků v modelu Smithe a Price

Je v této konfiguraci fenotypů některý z nich evolučně stabilní? V další kapitole probereme dynamiku v evoluci, zatím však zkoumejme systém v ustáleném stavu. Která z těchto strategií má potenciál utvořit stabilní populaci odolnou vůči mutantovi?

Zkoumejme tedy ESS na sloupcích tabulky. Populace myši bude jasně zlikvidována jestřáby a násilníky, což jsou best-response na strategii myš. Je pro jestřábí populaci (sloupec jestřábů) nejlepší odpovědí být jestřáb? Jedinci, chovající se jako myši nebo násilníci, mají v populaci jestřábů lepší vyhlídky na přežití (být jestřáb není ESS).

Odvetník je jediná strategie, v rámci které je nejlepší být odvetníkem mezi odvetníky – to znamená, že odvetník je ESS (myš je ovšem stejně dobrá).

Výsledky jsou samozřejmě ovlivněny nastavenými pravděpodobnostmi. Pokud bude pravděpodobnost vážného zranění 0.9 jako reakce na strategii D , pak pochopitelně jestřábi vítězí (udeří první). Situace je navíc jiná při změně zisku u strategie R – pokud se bude zisk při útěku rovnat zisku při zranění (některé druhy mají pouze jednu příležitost k reprodukci), pak opět vítězí jestřábi. Naopak, pokud zisk z výhry je kladný, zisk z útěku nulový a zisk ze zranění značně záporný, pak dostaneme populaci velmi mírumilovných tvorů.

Provokátér-odvetník a Myš jsou zřejmě základem stabilní společnosti (jestřáb brzy narazí, násilník je zbabělec a odvetník je málo důrazný).

1.4.1 Konflikty mezi jedinci, kteří si nejsou schopni způsobit vážné zranění

Předpokládáme, že bojovně vybavení jedinci se v rámci svého druhu zraňovat nebudou. Nebo předpokládejme druhy, které nejsou vybaveny "zbraněmi", tudíž si z principu nemohou navzájem způsobit zranění, ale také vstupují do konfliktu. Obvykle pak vítězí ten, který v konfliktu déle vydrží (neuteče).

Takoví jedinci si uvědomují délku konfliktu. Rozhodnutí o délce jejich vytrvání v konfliktu – počet kol m_i je pak jejich strategií ve hře. Docházíme k poněkud odlišnému modelu, ovšem stavěnému na stejných základech. Zisk pro vítěze nechť je dán jako v . Máme-li dva jedince se strategií m_i udávající jejich ochotu setrvat v konfliktu až m_i kol, pak docházíme k situacím, kdy $m_1 > m_2$, tedy jeden z hráčů je ochoten setrvat déle než druhý (situace $m_1 = m_2$ není strategicky zajímavá).

Hráč s m_2 opouští konflikt po m_2 kolech a první hráč vítězí. Zisky hráčů v této konfiguraci jsou pak dány jako rozdíl výhry a nákladů spojených se setrváním v konfliktu, například $u_1 = v - m_2$ a

$$u_2 = -m_2.$$

Otázkou je nyní, zda-li může existovat evolučně stabilní strategie m^* odolná vůči mutantskému m_j . Může existovat společnost, kde všichni jedinci opouští hádku po m^* kolech? Kdo by pak v té společnosti vítězem jednotlivých bázových her? Mutant s $m^* + \epsilon, \epsilon > 0$ na tom bude vždy lépe. Mutant s $m^* + \epsilon$ způsobí přerod společnosti v $m^* + \epsilon$. Ovšem jenom na krátkou dobu, protože pak přijde ještě vytrvalejší mutant. Délky soubojů by tedy šly k nekonečnu. Zkusíme najít smíšenou ESS, která podle Nashe vždy musí existovat.

Předpokládejme, že jedinec vybírá svou m z intervalu $\langle a, b \rangle$ s pravděpodobností $p(\cdot)$ nějak rozloženou na intervalu $\langle a, b \rangle$. Bez delšího zkoumání řekneme, že m^* je ESS, pokud:

$$p(x) = \frac{1}{v} \exp\left(\frac{-x}{v}\right)$$

Smíšená ESS má dva způsoby interpretace: buď je jedincova strategie náhodně vygenerována při jeho zrození z pravděpodobnostní distribuce $p(x)$ nebo jedinec generuje svoji strategii s každým novým konfliktem.

1.5 Dynamika v Evoluční teorii her

Předpokládejme populaci s dostatečně mnoha jedinci, kde se odehrávají konflikty na úrovni dvouhráčových nekooperativních her s nenulovým součtem.

Dále zavedeme tyto předpoklady a notace:

- Nechť $U(s|r)$ je očekávaný zisk hráče hrajícího s , kdy protihráč hraje r .
- Předpokládejme k strategií s_1, s_2, \dots, s_k , které mohou členové populace hrát.
- Nechť x_i značí relativní zastoupení strategie s_i v populaci, $x = (x_1, \dots, x_k)$.
- Nechť $w_i(x)$ je fitness strategie s_i v populaci s rozložením strategií x .
- Dále, $\bar{w}(x)$ je střední hodnota fitness přes celou populaci.

Stav x' odvozený z x je dán diferenční rovnicí nazývanou *diskrétní replikátorská rovnice s frekvenčně-závislou fitness funkcí*:

$$x' = \left(x_i \frac{w_i(x)}{\bar{w}(x)} \right)_{i=1, \dots, k}$$

Nový stav populace, tzn. nové rozložení četností jednotlivých strategií s_1, \dots, s_k je dáno jejich aktuálním stavem násobeným relativní úspěšností strategie v rámci celku.

Co je ta fitness? Fitness strategie s_i je suma zisku při hraní s_i proti jednotlivým strategiím $\{s_j\}_{j=1, \dots, k}$ váhovaná jejich četnostmi. Tedy,

$$w_i(x) = w_0 + \sum_{j=1}^k x_j U(s_i | s_j); \forall i = 1, \dots, k \quad (1.1)$$

Hodnota w_0 značí základní očekávání populace, kdyby nemuseli hru hrát (nedocházelo by k interakcím). Bez potíží můžeme položit $w_0 = 0$.

Navazující na model Smithe a Price si ukážeme dva demonstrační příklady dynamiky vývoje smíšené populace tvořené všemi pěti fenotypy s počátečním nastavením počtu jedinců 100,1,20,10,30 (myši, ještřábi, násilníci, odvetníci, provokatéři) – obrázek 1.4 a 100000,10,20,10,30 – obrázek 1.5.

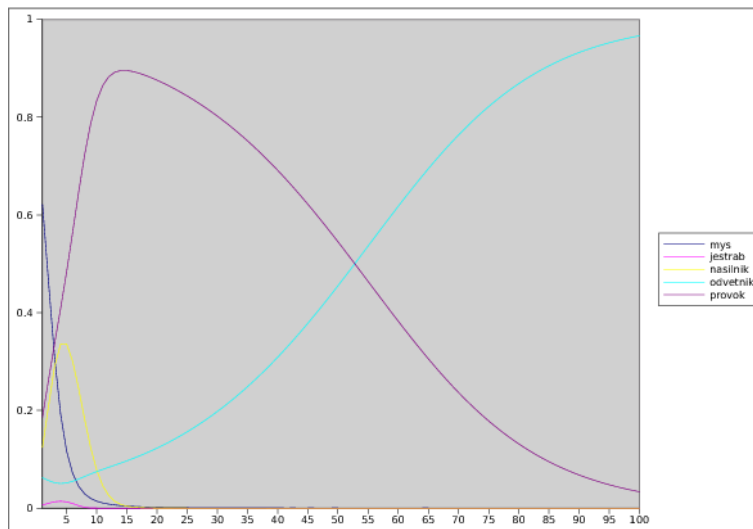


Figure 1.4: Počáteční nastavení populace 100,1,20,10,30

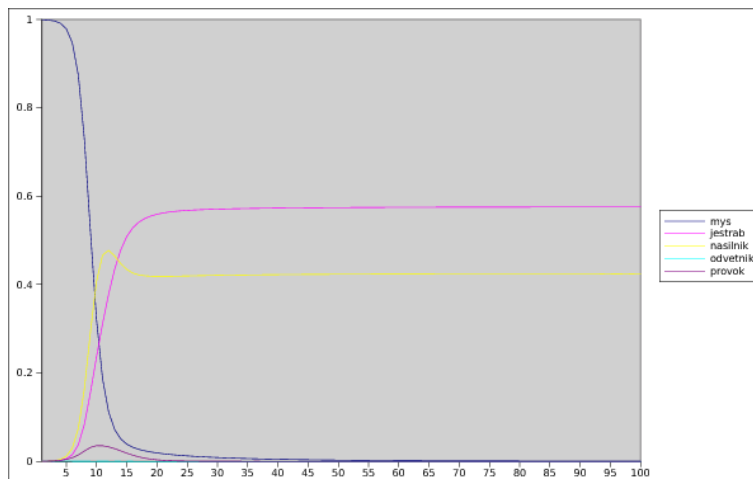


Figure 1.5: Počáteční nastavení populace 100000,10,20,10,30

Z prvního obrázku (1.4) s poměrně představitelným rozložením fenotypů je zřejmé, že myši rychle

vyhynou, stejně jako jestřáb a násilníci. Vedle toho provokatéři nabydou krátkodobé většiny, kterou vystřídá a navždy opanuje evoluční stabilita odvetníků.

Na druhém obrázku (1.5) využijí jestřábi a násilníci velkého počtu myší k tomu, aby se s jejich pomocí rozmnožili a pak se dostanou do stabilního stavu, kdy koexistují dlouhodobě.

1.6 Vztah Nashova ekvilibria a ESS

Jaký je vztah ESS a NE? V této kapitole od počátku říkáme, že ESS profil je zpřesněním Nashova ekvilibria, což znamená, že každý ESS profil je NE, ale ne každé NE je ESS profil. K demonstraci tohoto faktu použijeme vyjádření fitness evolučně stabilní strategie s_1 vůči fitness mutantské strategie s_2 .

Pokud má být strategie s_1 ESS, pak by výskyt mutanta s_2 s frekvencí ϵ měl dát populaci stále vyšší fitness $w_1(x)$ než je $w_2(x)$, tedy $w_1(x) - w_2(x) > 0$, kde $x = (1 - \epsilon, \epsilon)$.

Předpokládejme tedy, že $x_2 = \epsilon$ je frekvence mutantů strategie s_2 , strategie s_1 má frekvenci $x_1 = 1 - \epsilon$. Pak ze vztahu (1.1) obdržíme:

$$\begin{aligned} w_1(x) - w_2(x) &= \\ &= (1 - \epsilon)U(s_1|s_1) + \epsilon U(s_1|s_2) - (1 - \epsilon)U(s_2|s_1) - \epsilon U(s_2|s_2) = \\ &= (1 - \epsilon)[U(s_1|s_1) - U(s_2|s_1)] + \epsilon[U(s_1|s_2) - U(s_2|s_2)] \end{aligned}$$

$$w_1(x) - w_2(x) = (1 - \epsilon)[U(s_1|s_1) - U(s_2|s_1)] + \epsilon[U(s_1|s_2) - U(s_2|s_2)] \quad (1.2)$$

Kdy je výraz (1.2) kladný? Pro dostatečně malé ϵ (v ESS očekáváme mutantní výskyt dostatečně málo frekventovaný) je určující první člen výrazu, a ten je kladný pro $U(s_1|s_1) > U(s_2|s_1)$. Plyne z toho, že s_1 musí být best-response na s_1 – a profil (s_1, s_1) je tudíž NE (NE je přece profil, kde jsou strategie sobě navzájem best-response).

Pokud přesto připouštíme, že i s_2 může být best-response na s_1 , tedy, že $U(s_1|s_1) = U(s_2|s_1)$, a hráč je tedy indiferentní mezi s_1 a s_2 , když hraje proti protivníkovi s_2 , pak je pro kladnost výrazu rozhodující druhý člen, protože ten první je nulový.

Pokud tedy $U(s_1|s_1) = U(s_2|s_1)$, pak musí platit pro kladnost celého výrazu $U(s_1|s_2) > U(s_2|s_2)$, kdy hráč jistě ví, že proti protivníkovi mutantské strategii je lepší jeho ESS strategie.

Strategie s_1 je tedy best-response na s_2 a současně s_1 je best-response na s_1 . Profil (s_1, s_1) tedy musí být NE.

Dostáváme se tak k definicím 2 a 3 evolučně stabilní strategie z počátku kapitoly.