Konzultace MAT 1

$P \neq \emptyset$ – atomické formule (výrokové)

L_P – jazyk výr. logiky, $L_P = P \cup \{\neg, \Rightarrow, (,)\}$

Def. formule

1) $A \in P$ je formule
2) A formule, pak $(\neg A)$ formule
3) A, B for., pak $(A \to B)$ formule
4) nic jiného.

Pravdivostní ohodnocení

$$v : P \to \{0, 1\}$$

$$\bar{v}(A) = v(A), \quad A \in P$$

$$\bar{v}(\neg A) = \begin{cases} 1 & \bar{v}(A) = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\bar{v}(A \to B) = \begin{cases} 0 & \bar{v}(A) = 1 \text{ a } \bar{v}(B) = 0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

A pravdivá při ohodnocení v, $\bar{v}(A) = 1$

A pravdivá (tautologie), $\bar{v}(A) = 1$ pro lib. $\bar{v}$.

$$\models A$$

Konzultace MAT 1

Př 1)

Dokažte, že $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ je tautologie.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(q \to r) \to (p \to r)$	—
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

= ✓

Př 2) $\varphi : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ funkce

p	q	$\varphi(p,q)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\varphi = ?$

$\varphi = (\neg p \wedge \neg q)$

Konzultace MAT 1

Př

p	q	$\varphi(p,q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

$\varphi = ?$

$$\varphi = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

Př Najděte A takovou, že

$$p \wedge A \sim p \wedge q$$
$$p \vee A \sim p \vee r$$

A obsahuje prvotní formule p, q, r.

1)

p	q	r	$p\wedge A$ / $p\wedge q$	$p\vee A$ / $p\vee r$	A
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$$A = (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\sim (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge q)$$

---

nebo

2) $v(p) = 1 \Rightarrow \bar{v}(A) = v(q)$

$v(p) = 0 \Rightarrow \bar{v}(A) = v(r)$

$\Rightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

Konzultace MAT 1

axiomy

(A1) $A \to (B \to A)$

(A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(A3) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$

MP (pravidlo odloučení)

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \to B \end{array}}{B}$$

Důkaz formule A

$A_1, \dots, A_n$, $A_n = A$

$i \leq n$, A_i - axiom nebo závěr MP z $A_1, \dots, A_{i-1}$

$\vdash A$

Důkaz z předpokladů T

$T \vdash A$

A_i --- " ---

" nebo $A_i \in T$.

Konzultace MAT 1

a) $\vdash \neg A \to (A \to B)$

D|

$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (A1)

$\neg A \vdash \neg B \to \neg A$ (V o Dedukci)

$\boxed{T \vdash A \to B \Leftrightarrow T, A \vdash B}$

$\vdash (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (A3)

$\neg A \vdash A \to B$ (MP)

$\vdash \neg A \to (A \to B)$ (VD)

---

b) $\vdash \neg\neg A \to A$

D|

$\vdash \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A)$ (a)

$\neg\neg A \vdash \neg A \to \neg\neg\neg A$ (VD)

$\vdash (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$ (A3)

$\neg\neg A \vdash \neg\neg A \to A$ (MP)

$\neg\neg A \vdash A$ (VD)

$\vdash \neg\neg A \to A$ (VD)
