MAT 2

Př] Negujte.

"Všechny židle jsou obsazené."

Jazyk:

Př] Jazyk teorie grupoidů L_G

- s rovností =
- bin. f. symbol $\cdot$

Př] Jazyk teorie množin L_M

- s rovností =
- bin. predikát $\in$

Termy:

1) v L_G: $x \cdot y$, $(x \cdot y) \cdot z$

2) Jazyk aritmetiky (elementární)

- =
- f. symboly: 0 (konstanta)
  S (unární)
  $+, \cdot$ (binární)

termy: 0, $0+0$, $S(0)$, $S(S(0))$,
x, $S(x)$, $x+y$, $S(x+y)$, $S(x+y) \cdot z$

Př Mějme jazyk s jediným unárním funkčním symbolem. Popište všechny termy tohoto jazyka.

$x, y, z, \dots$

$f(x), f(y), f(z), \dots$

$f(f(x)), f(f(y)), \dots$

$\vdots$

$f^n(x), f^n(y), f^n(z), \dots$

obecně $f^n(x)$

x - proměnná

$n \geq 0$

Př f, g unární f. symboly. Popište vš. termy.

$h_1(h_2(h_3(\dots h_n(x)\dots)))$, x - proměnná, $n \geq 0$, $h_i \in \{f, g\}$

Př jazyk s $=$. **atomické formule**

f - unární f. s.

P - bin. predikát.

Popište všechny atomické formule.

$f^n(x) = f^m(y)$, $m, n \geq 0$, x, y - proměnné

a

$f^n(x) = f^m(x)$, $m, n \geq 0$, x - proměnná

a

$P(f^n(x), f^m(y))$

a

$P(f^n(x), f^m(x))$

Formule

Př. Vypište vš. podformule formule

$$\forall x\, \forall y\, (P(x,y) \to \exists z\, (P(x,z) \wedge \neg(y=z)))$$

$P(x,y)$ $P(x,z) \wedge \neg(y=z)$

$P(x,z)$ $\exists z\, (P(x,z) \wedge \neg(y=z))$

$y=z$

$\neg(y=z)$ $P(x,y) \to \exists z\, (P(x,z) \wedge \neg(y=z)) \equiv \varphi$

$\forall y\, (\varphi)$

$\forall x \forall y\, (\varphi)$ ~ sentence (uzavřená f.)

Výskyt

(podtržené jsou volné)

Př. 1) $\forall x\, P(x,\underline{y}) \vee \forall y\, P(\underline{x},y)$

2) $\forall x\, (P(x,\underline{y}) \vee \forall y\, P(x,y))$

---

substituce termu t za volné proměnné x ve φ

$\Leftrightarrow$ žádný výskyt proměnné z t se nestane po substituci vázaným

Př. 1) $y+3$ za x v $\exists z\, (x+y=z)$ ✓

2) $y+z$ —— " —— ✗

3) $(P(x,y) \wedge \forall x\, P(x,y))\,(x/3)$ dává

$$P(\underline{3},y) \wedge \forall x\, P(\underline{x},y).$$

Realizace $\mathcal{M}$ jazyka L.

- $M \neq \emptyset$ - univerzum
- $f \longmapsto f_{\mathcal{M}} : M^n \to M$, f n-ární
- $P \longmapsto P_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$, P n-ární

Př $M^0 = ?$ $= \{\emptyset\}$

Ohodnocení proměnných

$$e : \{\text{proměnné}\} \longrightarrow M$$

Hodnota termu t v realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L při e.

$t[e]$ je

i) $x[e] = e(x)$, x - proměnná

ii) $t = f(t_1, \dots, t_n)$

$$t[e] = f(t_1, \dots, t_n)[e] = f_{\mathcal{M}}(t_1[e], \dots, t_n[e])$$

Formule φ je pravdivá v realizaci $\mathcal{M}$ při ohodnocení e

$$\mathcal{M} \models \varphi[e]$$

definice viz přednáška

např. $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)[e] \Leftrightarrow$

$(t_1[e], \dots, t_n[e]) \in P_{\mathcal{M}}$

$$\mathcal{M} \models \varphi \iff \mathcal{M} \models \varphi[e] \quad \forall e.$$

Př

L jazyk s jediným unárním pred. P a realizace $\mathcal{M}$ nad univ. $M = \{a, b\}$, kde $P_M = \{a\}$

Rozhodněte, zda platí:

1) $\mathcal{M} \models \exists x \left[P(x) \to (P(x) \land \neg P(x))\right]$ ✓

2) $\mathcal{M} \models P(x) \to \forall x\, P(x)$ X [vezmeme $e(x) = a$]

3) $\mathcal{M} \models \left[\forall x\, P(x) \to \forall x\, \neg P(x)\right] \to$

$\to \forall x \left[P(x) \to \neg P(x)\right]$ X

Př

$\mathbb{N}_0$ s operací následníka, +, · tvoří jazyk elementární aritmetiky, L_A

Napište v L_A formuli $\varphi(x, y, z)$ obsahující volné proměnné x, y, z t. ž. pro každé $m, n, k \geq 0$ platí,

$\mathbb{N}_0 \models \varphi(x, y, z)$ právě když $k = NSD(m, n)$

$\varphi(x, y, z)$ má tvar

$(\exists r)(\exists s)\left[(x = r \cdot z) \land (y = s \cdot z)\right] \land$

$(\forall t)\left[(\exists u)(\exists v)\left[(x = u \cdot t) \land (y = v \cdot t)\right] \to\right.$

$\left.\to (\exists w)(z = w \cdot t)\right]$

$$\mathbb{N}_0 \models \forall x \forall y \exists z \ \varphi(x,y,z)$$

– co ta formule říká?

(každé dvě čísla z $\mathbb{N}_0$ mají NSD)

Logicky platná formule φ jazyka L.

$\models \varphi$ jestliže $\mathcal{M} \models \varphi$ pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka L.

Př $\models \forall x (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$, x není volná ve φ.

Dk V každé realizaci $\mathcal{M}$ při každém ohodnocení e ta formule platí: Nechť $\mathcal{M}$ je realizace a e ohodnocení.

1) if $\mathcal{M} \not\models (\forall x)(\varphi \to \psi)[e]$ ✓

2) nechť $\mathcal{M} \models (\forall x)(\varphi \to \psi)[e]$

a) $\mathcal{M} \not\models \varphi[e]$, pak $\mathcal{M} \models (\varphi \to (\forall x)\psi)[e]$ ✓

b) $\mathcal{M} \models \varphi[e]$. Pak i) $\mathcal{M} \models (\varphi \to \psi)[e(x/m)]$, $m \in M$;

ii) $\mathcal{M} \models \varphi[e(x/m)]$, $m \in M$, protože x není volná ve φ.

Odtud plyne $\mathcal{M} \models \psi[e(x/m)]$, $m \in M$, tj. $\mathcal{M} \models (\forall x)\psi[e]$.

Celkem tedy $\mathcal{M} \models (\varphi \to (\forall x)\psi)[e]$. ✓

DÚ

Rozhodněte, které z následujících formulí jsou logicky platné. Své tvrzení zdůvodněte.

1) $(\forall x)(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi$ ✓

2) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi$ ✗

3) $(\forall x)(\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi$ ✗

4) $(\exists x)(\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi$ ✓

Př φ, ψ - formule. Rozhodněte, které z násled. formulí jsou log. platné?

1) $(\exists x)(\varphi \to \psi) \to ((\exists x)\varphi \to (\exists x)\psi)$

2) $(\exists x)(\varphi \to \psi) \to ((\forall x)\varphi \to (\exists x)\psi)$

---

1) Ne: Vezmeme jazyk se dvěma predik. symb. P, Q.

Pak $(\exists x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x))$

není log. platná:

$\mathcal{M}$ s univerzem $M = \{0,1\}$, $P_{\mathcal{M}} = \{0\}$, $Q_{\mathcal{M}} = \emptyset$.

Pak $\mathcal{M} \models (P(x) \to Q(x))[1]$, takže $\boxed{e(x/1)}$

$\mathcal{M} \models (\exists x)(P(x) \to Q(x))$.

Dále $\mathcal{M} \models (\exists x)P(x)$, $\mathcal{M} \not\models (\exists x)Q(x)$.

Tedy $\mathcal{M} \not\models (\exists x)P(x) \to (\exists x)Q(x)$.

2) ANO:

$\mathcal{M}$ realizace, e ohodnocení proměnných.

a) if $\mathcal{M} \not\models (\exists x)(\varphi \to \varphi)[e]$ ✓

b) $\mathcal{M} \models (\exists x)(\varphi \to \varphi)[e]$.

i) if $\mathcal{M} \not\models ((\forall x)\varphi)[e]$, pak $\mathcal{M} \models ((\forall x)\varphi \to (\exists x)\varphi)[e]$ ✓

ii) nechť $\mathcal{M} \models ((\forall x)\varphi)[e]$.

Máme: $\exists m_0 \in M$ t. ž. $\mathcal{M} \models (\varphi \to \varphi)[e(x/m_0)]$.

a $\forall m \in M$ platí $\mathcal{M} \models \varphi[e(x/m)]$.

Tedy $\mathcal{M} \models \varphi[e(x/m_0)]$.

To znamená, že

$$\mathcal{M} \models \varphi[e(x/m_0)], \text{ a tedy}$$

$$\mathcal{M} \models (\exists x)\varphi[e], \text{ tedy}$$

$$\mathcal{M} \models ((\forall x)\varphi \to (\exists x)\varphi)[e]$$ ✓

Prenexní tvar formulí

φ - otevřená pokud neobsahuje kvantifikátory.

φ v prenexním tvaru pokud je tvaru

$(Q_1 x_1)(Q_2 x_2) \dots (Q_n x_n)\psi$, kde

1) $x_1, \dots, x_n$ - proměnné (navzájem různé)
2) $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$
3) ψ otevřená

K formuli

$$(\forall x)\,(P(x) \to (\forall y)\,(R(x,y) \to \neg(\forall z)\,S(y,z)))$$

najděte ekviv. formuli v prenexním tvaru.

1) Pouze $\neg, \wedge, \vee$:

$$(\forall x)\left(\neg P(x) \vee (\forall y)\left(\neg R(x,y) \vee \underline{\neg(\forall z)\,S(y,z)}\right)\right)$$

$$(\forall x)\left(\neg P(x) \vee (\forall y)\,\underline{\left(\neg R(x,y) \vee (\exists z)\neg S(y,z)\right)}\right)$$

$$(\forall x)\,\underline{\left(\neg P(x) \vee (\forall y)(\exists z)\left(\neg R(x,y) \vee \neg S(y,z)\right)\right)}$$

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)\,(\neg P(x) \vee \neg R(x,y) \vee \neg S(y,z))$$

Př 1 – konstanta
$\cdot$ – binární funkční symbol

K formuli ~~$(\forall x)(\exists y)(x\cdot y = 1) \to (\forall x)(\forall y)(\forall z)($~~

$$(\forall x)(\exists y)\,(x\cdot y = 1) \to (\forall x)(\forall y)(\forall z)\,(x\cdot z = y\cdot z \to x = y)$$

najděte ekviv. form. v PT.

$$\underline{\neg\,(\forall x)(\exists y)\,(x\cdot y = 1)} \vee (\forall x)(\forall y)(\forall z)\,(\neg(x\cdot z = y\cdot z) \vee x = y)$$

$$\underline{(\exists x)(\forall y)\,\neg(x\cdot y = 1)} \vee (\forall x)(\forall y)(\forall z)\,(\neg(x\cdot z = y\cdot z) \vee x = y)$$

$$\underline{(\exists a)(\forall b)}\,\neg(a\cdot b = 1) \vee \underline{(\forall x)(\forall y)(\forall z)}\,(\neg(x\cdot z = y\cdot z) \vee (x = y))$$

$$(\exists a)(\forall b)(\forall x)(\forall y)(\forall z)\left[\neg(a\cdot b = 1) \vee \neg(x\cdot z = y\cdot z) \vee x = y\right]$$

Axiomatická teorie PL – viz prof. Šlapal na webu.

Teorie

L jazyk PL.

T množina formulí jazyka L je TEORIE s jazykem L

T sporná if $T \vdash \varphi$ φ lib. formule

Model

Realizace $\mathcal{M}$ jazyka L taková, že $\forall \varphi \in T$, $\mathcal{M} \models \varphi$.

$\mathcal{M} \models T$

Př jazyk elem. aritmetiky.

spec. axiomy:

$$\left.\begin{array}{l} \neg S(x) = 0 \\ S(x) = S(y) \longrightarrow x = y \\ x + 0 = x \\ x + S(y) = S(x+y) \\ x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x \end{array}\right\}$$ určují teorii nazývanou elementární aritmetika

Přidáme (schéma indukce)

φ - formule, x - proměnná

$$\varphi(x/0) \longrightarrow \left[(\forall x)(\varphi \to \varphi(x/S(x))) \to (\forall x)\varphi \right]$$

Dostáváme teorii zvanou

Peanova aritmetika

$\mathbb{N}_0$ je model (např.)