MAT 3

<u>n-ární operace</u> na A je zobrazení z $A^n \to A$

- 0-ární – zobrazení z 1-prvkové do A, tj. konstanta
- 1-ární – unární
- 2-ární – binární

<u>Typ Ω-algebry</u> : zobrazení $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$

- Ω – množina symbolů

<u>Algebra typu τ</u> je dvojice $\mathbb{A} = (A, F)$

- $A \neq \emptyset$ – nosná množina
- $F : \Omega \to \{\text{operace na } A\}$

$F(\omega)$ – $\tau(\omega)$-ární operace na A

$$F(\omega) = F_\omega \qquad F_\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)})$$

Př: A množina, $\cdot : A \times A \to A$.

$(A, \cdot)$ <u>grupoid</u>

<u>Pologrupa</u> když $\forall a,b,c \in A.\ a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

Prvek $a \in A$ je <u>levá jednotka</u>, když $\forall b \in A.\ a\cdot b = b$

<u>pravá</u> –"– $\forall b \in A.\ b\cdot a = b$

Má-li $(A, \cdot)$ levou i pravou jednotku, pak se rovnají (<u>neutrální prvek</u>)

D: l – levá, p – pravá.

$p = l \cdot p = l$

Př]

A – množina

definujme $\cdot$ takto: $a \cdot b = b$

- $(A, \cdot)$ grupoid ✓
- každý prvek je levá jednotka ✓
- pologrupa: $a \cdot (\underline{b \cdot c}) = \underline{a \cdot c} = c$
  $(\underline{a \cdot b}) \cdot c = (\underline{b \cdot c}) = c$ $\Big\} =$ ✓

$a \in A$ <u>levá nula</u> : $\forall b \in A .\ a \cdot b = a$

<u>pravá nula</u> $\forall b \in A .\ b \cdot a = a$

$(A, \cdot)$ grupoid, pak <u>levá nula</u> = <u>pravá nula</u> (pokud existují)

Př] $(A, \cdot)$, $a \cdot b = b$

- každý prvek levá jednotka, pravá nula
- pologrupa (pravých nul)

<u>Monoid</u> = pologrupa s jednotkou ; $(A, \cdot, 1)$

$(A, \cdot, 1)$ monoid, <u>b</u> inverzní k <u>a</u> jestliže $b \cdot a = 1$

Má-li a levou i pravou inverzi, jsou si rovny
(neplatí pro grupoid)

l – levá,
p – pravá

$$\begin{aligned}(la)p &= 1 \cdot p = p \\ &\shortparallel \\ l(ap) &= l \cdot 1 = l\end{aligned}$$

Grupa = monoid, kde každý prvek má inverzi $(G, \cdot)$

$(G, \cdot, ^{-1}, 1)$

Př $(\{x, y, z, t\}, \cdot)$ grupoid s

$\cdot$	x	y	z	t
x	x	x	x	x
y	x	y	y	y
z	x	y	z	t
t	x	t	t	t

– pologrupa?

x – nulový prvek

z – jednotka

$(\{y, t\}, \cdot)$ – pologrupa levých nul

Idempotent: $a \cdot a = a$

Každá grupa má právě jeden idempotent

D) 1 – idempotent

Nechť a – idempotent. Pak $a \cdot a = a$

$$1 = a \cdot a^{-1} = (a \cdot a) \cdot a^{-1} = a \cdot (a \cdot a^{-1}) = a \cdot 1 = a$$

Doplňte tabulku 3-prvkové pologrupy.

$\cdot$	x	y	z
x	y	x	z
y			
z			

$$y\cdot x = (x\cdot x)\cdot x = x(xx) = xy = x$$
$$yy = (xx)y = x(xy) = xx = y$$
$$yz = (xx)z = x(xz) = xz = z$$

$\cancel{x(zx)}$

$$z\cdot x = (xz)x = x(zx) \Longrightarrow \begin{cases} zx = x \Rightarrow zx = x(zx) = xx = y \quad \}\ \text{spor} \\ zx = y \Rightarrow zx = xy = x \\ zx = z \Rightarrow zx = xz = z\ \checkmark \end{cases}$$
$$z\cdot y = (xz)\cdot y = x(zy)$$

Řešení:

y	x	y	z
z	z	z	z

$(A,\cdot)$, $(B,*)$ grupoidy

$\varphi: A \to B$ <u>izomorfismus</u> pokud φ - bijekce

a platí $\varphi(a\cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

Př Kolik existuje až na izom. 2-prvkových grupoidů (10), pologrup (5), monoidů (2) grup (1)?

$\cdot$	a	b
a		
b		

$2^4 = 16$ možností doplnění

Přehled

	co je to?	jednotka	nula	idemp.	inv.
$(\mathbb{N}, +)$	pologrupa	—	—	—	—
$(\mathbb{N}_0, +)$	monoid	0	—	0	—
$(\mathbb{Z}, +)$	grupa	0	—	0	$-a$

$\nearrow$ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$(\mathbb{Z}, \cdot)$	monoid	1	0	0, 1	
$(\mathbb{Q}, \cdot)$	monoid	1	0	0, 1	
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$	grupa	1	—	1	$\frac{1}{a}$
$(\mathbb{Z}, -)$	grupoid			0	

$X \neq \emptyset$

$(\mathcal{P}(X), \cap)$	monoid	X	$\emptyset$	vše
$(\mathcal{P}(X), \cup)$	monoid	$\emptyset$	X	vše

$X = \emptyset \Rightarrow$ jednotková grupa

Př

$$(\mathbb{R}-\{0\}, *)$$

$$a * b = \begin{cases} a \cdot b & a > 0 \\ \frac{a}{b} & a < 0 \end{cases}$$

Dokažte, že jde o grupu:

1) $*$ je operace:

$a, b \in \mathbb{R}-\{0\}$, pak $a * b \in \mathbb{R}-\{0\}$: $a, b \neq 0 \Rightarrow ab, \frac{a}{b} \neq 0$

2) asoc. $a * (b * c) =$

1) $\boxed{a > 0}$ $a \cdot (b * c) =$

$[b > 0]$ $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$

$[b < 0]$ $a \cdot \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$

$= (a \cdot b) * c$

$[a \cdot b < 0]$

$= (a * b) * c$

2) $[a < 0]$ ...

3) jednotkový prvek: 1

4) inverze:

$$a^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{a} & a > 0 \\ a & a < 0 \end{cases}$$

Př]

Nechť $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ je grupa, $a \in G$.

Pak $(G, \square)$ je grupa, kde $g \square h = g \cdot a \cdot h$.

D]

1) $\square$ – bin. operace

2) asoc: $g \square (h \square i) = g \square (hai) = gahai$

$(g \square h) \square i = (gah) \square i = gahai$ ✓

3) neutrální:

$e \in G. \quad g \square e = e \square g = g$

$gae = eag = g \Rightarrow ae = ea = 1$

$\Rightarrow e = a^{-1}$

4) inverzní: $g \in G \Rightarrow \bar{g} \in G. \quad g \square \bar{g} = \bar{g} \square g = e = a^{-1}$

$$\Rightarrow \quad ga\bar{g} = a^{-1}$$
$$\bar{g}ag = a^{-1}$$

$$ga\bar{g} = a^{-1} \quad / \, g^{-1}\cdot$$
$$a\bar{g} = g^{-1}a^{-1} \quad / \, a^{-1}\cdot$$
$$\bar{g} = a^{-1}g^{-1}a^{-1}$$

t.j. $g \in G \Rightarrow g \square a^{-1}g^{-1}a^{-1} = gaa^{-1}g^{-1}a^{-1} = a^{-1} = e$ ✓

$a^{-1}g^{-1}a^{-1} \square g = a^{-1}g^{-1}a^{-1}ag = a^{-1} = e$

Zákon o krácení (ZoK)

$a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$

$b \cdot a = c \cdot a \Rightarrow b = c$

Věta: Konečná pologrupa, kde platí zákon o krácení je grupa.

Dokažte předchozí větu.

$(S, \cdot)$ konečná pologrupa. Pak platí

$\forall a \in S \ \exists k > l . \ a^k = a^l$

Ukážeme, že $a^{k-l} = 1$ (neutrální prvek), t.j.

$\forall b \in S. \ a^{k-l} \cdot b = b \cdot a^{k-l} = b$

$a^k = a^l$

$a^k \cdot b = a^l \cdot b$

$\underline{a^l} \cdot a^{k-l} \cdot b = \underline{a^l} \cdot b \Rightarrow_{ZoK} \underline{\underline{a^{k-l} \cdot b = b}}$

$a^k = a^l$

$b \cdot a^k = b \cdot a^l$

$b \cdot a^{k-l} \cdot \underline{a^l} = b \cdot \underline{a^l} \Rightarrow_{ZoK} \underline{\underline{b \cdot a^{k-l} = b}}$

Inverze k a hledáme a' tak, že $a'a = aa' = a^{k-l}$

$a^{k-l-1} \cdot a = a^{k-l}$

$a \cdot a^{k-l-1} = a^{k-l}$

$\Rightarrow \underline{\underline{a' = a^{k-l-1}}}$

Zákon odělení (ZoD)

$$\forall a, b \quad \exists x, y \quad ax = b$$
$$ya = b$$

Dokažte:

Pologrupy kde platí zákon o dělení jsou právě grupy.

D $\boxed{\Leftarrow}$ $(G, \cdot)$ grupa. Pak $(G, \cdot)$ pologrupa a zvolme pro a, b

$$x = a^{-1} b$$
$$y = b a^{-1}$$

Pak $ax = a a^{-1} b = b$

$ya = b a^{-1} a = b$

$\boxed{\Rightarrow}$ Nechť $(S, \cdot)$ pologrupa.

- neutrální prvek: ze ZoD $\forall a \; \exists l_a . \; a \cdot l_a = a$

ukážeme, že $b \, l_a = b \quad \forall b \in S$:

ze ZoD máme $\exists y . \; y a = b, \; \forall y$.

$$b \cdot l_a = (y a) l_a = y \cdot (a \, l_a) = y \, a = b \checkmark$$

- ze ZoD $\forall a . \; \exists f_a . \; f_a \, a = a$.

ukážeme, že $\forall b \in S . \; f_a \cdot b = b$:

ze ZoD máme $\exists x . \; a x = b, \; \forall x$.

$\cancel{f_a \cdot b = (f_a \cdot a) \, b = f_a}$

$$f_a \cdot b = f_a \cdot (a x) = (f_a \cdot a) x = a \cdot x = b \checkmark$$

Z dřívějška víme, že $f_a = l_a$ - neutrální

Pokračování

– inverzní:

$\forall a \in S \ \exists a', a'' : a \cdot a' = e$ že $Z \circ D$

$a'' \cdot a = e$ e – neutrální

ukážeme, že $a' = a''$:

$a'' = a'' \cdot e = a'' \cdot (a \cdot a') = (a'' \cdot a) \cdot a' = e \cdot a' = a'$

Př Najděte všechny podalgebry $A = (\{a, b, c, d\}, f)$ typu (1), kde $f(a) = f(b) = c$

$f(c) = f(d) = d$

$\{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$