Zjistěte násobnost $(-1)$ v polynomu

$$f = x^5 - ax^2 - ax + 1$$

| | 1 | 0 | 0 | $-a$ | $-a$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1+a$ | 1 | 0 |
| $-1$ | 1 | $-2$ | 3 | $-4-a$ | $5+a$ | |
| $a=-5 \Rightarrow -1$ | 1 | $-3$ | 6 | $-10-a \neq 0$ | | |

$a \neq -5 \Rightarrow$ 1-násobný

$\Rightarrow a = -5 \Rightarrow$ 2-nás.

Věta: $f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

$a_n \neq 0$, ~~Pak~~ $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$

$(p, q) = 1$ ~~tedy~~

Pak

1) $p \mid a_0$ a $q \mid a_n$

2) $\forall r \in \mathbb{Z}.\ (p - rq) \mid f(r)$

Př] Najděte racionální kořeny + rozklad

$$12x^7 - 56x^6 + 115x^5 - 141x^4 + 103x^3 - 35x^2 - 3x + 9$$

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$, pak

$p \mid 9 \Rightarrow p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$

$q \mid 12 \Rightarrow q \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Pokračování

# MAT 06



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 1 1 1 1 1 1 | 3 3 3 | 9 9 9 | -1 -1 -1 -1 -1 -1 | -3 -3 -3 | -9 -9 -9 |
| $q$ | 1 2 3 4 6 12 | 1 2 4 | 1 2 4 | 1 2 3 4 6 12 | 1 2 4 | 1 2 4 |
| $p-q$ | $\cancel{0}$ -1 -2 $\cancel{-3}$ $\cancel{-5}$ $\cancel{-11}$ | 2 1 -1 | $\cancel{8}$ $\cancel{7}$ $\cancel{5}$ | -2 $\cancel{-3}$ -4 $\cancel{-5}$ $\cancel{-7}$ $\cancel{-13}$ | -4 $\cancel{-5}$ $\cancel{-7}$ | $\cancel{-10}$ $\cancel{-11}$ $\cancel{-13}$ |
| $p+q$ | 3 $\cancel{4}$ | $\cancel{4}$ 5 $\cancel{7}$ | | $\cancel{0}$ 2 | -2 | |

$$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, -3 \right\}$$

$$(p-q) \mid f(1)$$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | -56 | 115 | -141 | 103 | -35 | -3 | 9 | |
| 1 | 12 | -44 | 71 | -70 | 33 | -2 | -5 | 4 | $\Rightarrow f(1) = 4$ |
| -1 | 12 | -68 | 183 | -324 | 427 | -462 | 459 | -450 | $\Rightarrow f(-1) = -450$ |
| -3 | 12 | -92 | 391 | ... | | | | ✗ | |
| $\frac{1}{2}$ | 12 | -50 | 90 | -96 | 55 | — | | ✗ | |
| $-\frac{1}{3}$ | 12 | -60 | 135 | -186 | 165 | -90 | 24 | 0 ✓ | $\Rightarrow (x+\frac{1}{3})(12x^6-60x^5 \dots)$ $\Leftrightarrow (3x+1)(\dots)$ |
| vytknu 3 | 4 | -20 | 45 | -62 | 55 | -30 | 9 | | |
| $-\frac{1}{3}$ | 4 | | | | | — | ✗ | | |
| $\frac{3}{2}$ | 4 | -14 | 24 | -26 | 16 | -6 | 0 ✓ | | |
| vytknu 2 | 2 | -7 | 12 | -13 | 8 | -3 | | | |
| $\frac{3}{2}$ | 2 | -4 | 6 | -4 | 2 | 0 ✓ | | | |
| vytknu 2 | 1 | -2 | 3 | -2 | 1 | | | | |
| | vše 2+1 | | | | | | | | |

výsledek:

$$(3x+1)(2x-3)^2(x^4-2x^3+3x^2-2x+1)$$

Př)

$f_1 = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ – má vícenásobné kořeny?

$f_1' = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2 \Rightarrow f_2 = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$$(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) = (2x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\cdot\left(\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{3}{4}(x^2 - x + 1)$$

$$-\left(x^4 - \tfrac{3}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{2}x + 1$$

$$-\left(-\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{4}\right)$$

$$\tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{3}{4}$$

$$(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = (x^2 - x + 1)\cdot(2x - 1)$$

$$-(2x^3 - 2x^2 + 2x)$$

$$-x^2 + x - 1$$

$$-(-x^2 + x - 1)$$

$$0$$

$NSD(f_1, f_2) = (x^2 - x + 1) \Rightarrow$ 2 komplexně sdružené kořeny

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{f_1 = (x^2 - x + 1)}$$

Rozklad $12x^7 - 56x^6 + \dots + 9 =$

$= (3x+1)(2x-3)^2(x^2 - x + 1)^2$ nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$

$= (3x+1)(2x-3)^2\left(x - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$ nad $\mathbb{C}$.

## Ireducibilní nad $\mathbb{Q}$ - Eisensteinovo kritérium

$f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

$p$ - prvočíslo

Pokud $p \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$

$p \nmid a_n$

$p^2 \nmid a_0$

Pak $f$ ireducibilní nad $\mathbb{Q}$

---

Př] $x^8 - 3x^7 + 9x^2 - 3$ - ired. nad $\mathbb{Q}$

$p = 3$

---

## Minimální polynom prvku $a$ ($m_a$)

$a \in \mathbb{C}$

$m_a \in \mathbb{Q}[x]$

$m_a(a) = 0$ min. stupně

1) $f \in \mathbb{Q}[x]$, $f(a) = 0 \Rightarrow m_a \mid f$
2) $m_a$ - ireducibilní

---

Př] $a = \sqrt{2}$ na $\mathbb{Q}$

$m_a = (x^2 - 2)$

na $\mathbb{R}$ by to bylo $(x - \sqrt{2})$

Př)

$a = \sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$ , $m_a = ?$

$$a - \sqrt{2} = \sqrt[4]{2} \quad |^2$$

$$a^2 - 2a\sqrt{2} + 2 = \sqrt{2}$$

$$a^2 + 2 = \sqrt{2}\,(1+2a) \quad |^2$$

$$(a^2+2)^2 = 2\,(1+2a)^2$$

$$a^4 + 4a^2 + 4 + 2\cdot(1 + 4a + 4a^2)$$

$$a^4 - 4a^2 - 8a + 2 = 0 \implies x^4 - 4x^2 - 8x + 2 = m_a \; ?$$

(pokud ireducibilní, pak je to $m_a$) DÚ

---

Př) $a = \sqrt[7]{3} \implies m_a = x^7 - 3$

---

$\mathbb{Z}_2$ – napište všechny ireducibilní polynomy

1) stupně 1:

$X$

$X + 1$

(všechny lineární jsou ireducibilní)

2) st. 2:

$$X^2 = X \cdot X$$
$$X^2 + 1 = (X+1)(X+1)$$
$$X^2 + X = X\cdot(X+1)$$
$$X^2 + X + 1 \text{ —— ired.}$$

3) st. 3

$$\left.\begin{array}{l} X^3 + X^2 + 1 \\ X^3 + X + 1 \end{array}\right\} \text{ired.}$$

~~Pokračování~~



Př) Rozložte na součin ired. polynom

$$x^4+3x^3+2x^2+x+4 \text{ nad } \mathbb{Z}_5$$

potenciální kořeny

$0 \Rightarrow 4$
$1 \Rightarrow 1$
$2 \Rightarrow 4$
$3 \Rightarrow 2$
$4 \Rightarrow 3$

nemá kořen $\Rightarrow$ buď ired., nebo součin pol. nižšího st.

$$(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)$$

$$a(x^2+ba^{-1}x+ca^{-1})\cdot d(x^2+ed^{-1}x+fd^{-1})$$

$\Downarrow$ přeznačeno

$$(x^2+bx+c)\cdot(x^2+ex+f)$$

$$= x^4+ex^3+fx^2+bx^3+bex^2+bfx+ \\ +cx^2+cex+cf$$

$x^3$: $3=b+e$
$x^2$: $2=f+be+c$
$x$: $1=bf+ce$
$1$: $4=cf$

| $b$ | $e$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 2 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0 |
| 4 | 4 |

jen prohozené

$\boxed{b=0,\ e=3}$

$2=f+c$
$1=c\cdot 3 \Rightarrow c=2 \Rightarrow 2\cdot f=0$
$4=c\cdot f$

$\Downarrow$

N.Ř.

$\boxed{b=1,\ e=2}$

$2=f+2+c \Rightarrow 0=f+c \Rightarrow c=1$
$1=f+2c$ $\qquad f=4$
$4=cf$

Rozklad:

$$(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$$

ireducibilní