

Buď (A, \cdot) algebra typu (2) taková, že platí:

1. \cdot je asociativní,
2. existuje levý jednotkový prvek e ,
3. ke každému $x \in A$ existuje $y \in A$ takové, že $y \cdot x = e$.

Dokažte, že potom je e jednotkovým prvkem a každé $x \in A$ je invertibilní.

Řešení:

$(\forall x)(\exists y) yx = e$, a tedy také $(\exists z) zy = e$. Pak

$$x = ex = (zy)x = z(yx) = ze = z(ee) = z(yx)e = (zy)(xe) = e(xe) = xe.$$

Tedy e je i pravý jednotkový. Dále ukážeme, že x má inverzi:

$$xy = (xe)y = (ze)y = z(ey) = zy = e.$$

Tedy $yx = xy = e$, tj. $y = x^{-1}$.