Vlastnosti bezkontextových jazyků

Pumping teorém pro BJ

Věta 6.1 Nechť L je bezkontextový jazyk. Pak existuje konstanta $k > 0$ taková, že je-li $z \in L$ a $|z| \geq k$, pak lze z napsat ve tvaru:

$$z = uvwxy, vx \neq \varepsilon, |vwx| \leq k$$

a pro všechna $i \geq 0$ je $uv^iwx^iy \in L$.

❖ Ekvivalentní formulace Pumping lemmatu (použití explicitní alternace kvantifikátorů) :

$$\begin{array}{ll} L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow & \exists k > 0 : \\ & \forall z \in \Sigma^* : z \in L \wedge \ |z| \geq k \Rightarrow \\ & (\exists uvwxy \in \Sigma^* : z = uvwxy \wedge \ vx \neq \epsilon \ \wedge \ |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : uv^iwx^iy \in L) \end{array}$$

Důkaz. Nechť $L = L(G)$ a nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je gramatika v CNF.

1. Nejprve dokážeme implikaci:
   Jestliže $A \Rightarrow^{+} w$ pro nějaké $A \in N$, $w \in \Sigma^{*}$, pak $|w| \leq 2^{m-2}$, kde m je počet vrcholů nejdelší cesty v odpovídajícím derivačním stromu.

   Tato implikace platí, protože $|w|$ je rovno počtu přímých předchůdců listů příslušného derivačního stromu, který je maximálně roven počtu listů plného binárního stromu, jehož všechny větve obsahují $m-1$ uzlů, což je právě 2^{m-2}.

   Skutečně:

   - Plný binární strom s větvemi o n uzlech, má 2^{n-1} listů, což se snadno ukáže indukcí:
     - Plný binární strom s (jedinou) větví o $n = 1$ uzlu, má $1 = 2^0 = 2^{n-1}$ listů.
     - Plný binární strom s větvemi délky $n = n' + 1$ uzlů, $n' \geq 1$, má $2^{n'-1} + 2^{n'-1} = 2.2^{n'-1} = 2^{1+n'-1} = 2^{n'} = 2^{n-1}$ listů.
   - Postačí tedy volit $n = m - 1$, přičemž případ neplných binárních stromů není třeba uvažovat, neboť se zajímáme o stromy s maximálním počtem listů při dané maximální délce větví.

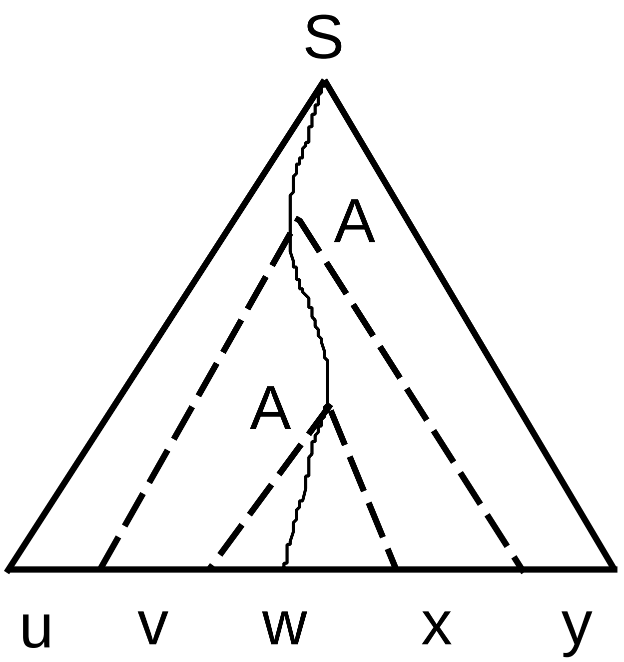
Důkaz pokračuje dále.

2. Položme $k = 2^{|N|} > 0$ a uvažujme libovolnou větu z takovou, že $|z| \geq k$.

   Označíme-li m počet vrcholů nejdelší cesty v odpovídajícím derivačním stromu, pak $2^{|N|} \leq 2^{m-2}$ a taková cesta pak obsahuje alespoň $|N| + 2$ vrcholů ($|N| + 2 \leq m$).

   Z těchto $|N| + 2$ vrcholů je jeden terminál a nutně alespoň dva jsou označeny stejným nonterminálem, řekněme A.

   Viz obrázek vpravo.



Řetězce v, x nemohou být prázdné, protože aplikované pravidlo mělo tvar $A \rightarrow BC$. Nyní uvažujme derivaci řetězce z tvaru:

$S \Rightarrow^* uAy \Rightarrow^+ uvAxy \Rightarrow^+ uvwxy = z$

To pak ovšem znamená, že v G existuje rovněž derivace:

$S \Rightarrow^* uAy \Rightarrow^+ uvAxy \Rightarrow^+ uvvAxxy \Rightarrow^+ uv^2wx^2y$,

protože $A \Rightarrow^+ w$, a tedy derivace $S \Rightarrow^* uv^iwx^iy$ pro libovolné $i > 0$, což je dokazované tvrzení. $\square$

Použití Pumping lemmatu

$(L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_2)$ Obměna implikace

$$
\begin{aligned}
A \equiv \quad & \exists k > 0 : \\
& \forall z \in \Sigma^* : z \in L \wedge \ |z| \geq k \Rightarrow \\
& (\exists uvwxy \in \Sigma^* : z = uvwxy \wedge \ vx \neq \epsilon \ \wedge \ |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : uv^i wx^i y \in L)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg A \equiv \quad & \forall k > 0 : \\
& \exists z \in \Sigma^* : z \in L \wedge \ |z| \geq k \ \wedge \\
& (\forall u, v, w, x, y \in \Sigma^* : z = uvwxy \wedge \ vx \neq \epsilon \ \wedge \ |vwx| \leq k \Rightarrow \exists i \geq 0 : uv^i wx^i y \notin L)
\end{aligned}
$$

- K důkazu, že jazyk L není bezkontextový stačí dokázat tvrzení $\neg A$.

Aplikace pumping teorému

Lemma 6.1 Jazyk $L = \{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$ není bezkontextovým jazykem.

Důkaz.

❖ Pro libovolné $k > 0$ zvolíme slovo $z = a^k b^k a^k b^k$ ($z \in L \wedge |z| \geq k$).

Poznámka: Uvažte, proč je volba slov typu $z = a^{2k}$ či $z = a^k b^{10} a^k b^{10}$ špatná (tj. důkaz pro tyto slova nelze provést).

❖ Dále uvažme všechny rozdělení $z = uvwxy$ kde $vx \neq \epsilon \;\wedge\; |vwx| \leq k$.

1. $vwx = a^m$: Při volbě $i \neq 1$ ve slově uv^iwx^iy porušíme počty znaků a a b v první nebo ve druhé části slova.
2. $vwx = b^m$: Stejné jako v (1).
3. $vwx = a^m b^n$: Při volbě $i \neq 1$ ve slově uv^iwx^iy porušíme shodu první a druhé části slova.
4. $vwx = b^m a^n$: Stejné jako v (3).

Uvědomme si, že volby $vwx = a^m b^n a^o$ a $vwx = b^m a^n b^o$ porušují podmínku $|vwx| \leq k$.

❖ Ukázali jsme, že pro L platí tvrzení $\neg A$ (viz. předchozí slajd) a tudíž $L \notin \mathcal{L}_2$.

Substituce jazyků

Definice 6.1 Nechť $\mathcal{L}$ je třída jazyků a nechť $L \subseteq \Sigma^*$ je jazykem třídy $\mathcal{L}$. Dále nechť $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a nechť jazyky označené $L_{a_1}, L_{a_2}, ..., L_{a_n}$ jsou rovněž jazyky třídy $\mathcal{L}$. Říkáme, že třída $\mathcal{L}$ je uzavřena vzhledem k substituci, jestliže pro každý výběr jazyků $L, L_{a_1}, L_{a_2}, ..., L_{a_n}$ je také jazyk $\sigma_{L_{a_1}, L_{a_2}, ..., L_{a_n}}(L)$

$$\sigma_{L_{a_1}, L_{a_2}, ..., L_{a_n}}(L) = \{x_1 x_2 ... x_m \mid b_1 b_2 ... b_m \in L \land \forall i \in \{1, ..., m\} : x_i \in L_{b_i}\}$$

ve třídě $\mathcal{L}$.

Příklad 6.1 Nechť $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$, $L_0 = \{a\}$, $L_1 = \{b^m c^m \mid m \geq 1\}$. Substitucí jazyků L_0 a L_1 do L dostaneme jazyk

$$L' = \{a^n b^{m_1} c^{m_1} b^{m_2} c^{m_2} ... b^{m_n} c^{m_n} \mid n \geq 1 \land \forall i \in \{1, ..., n\} : m_i \geq 1\}$$

Morfismus jazyků

Definice 6.2 Nechť Σ a Δ jsou abecedy a $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk nad abecedou Σ.

- Zobrazení $h : \Sigma^* \to \Delta^*$ nazveme morfismem nad slovy, platí-li $\forall w = a_1 a_2 ... a_n \in \Sigma^* : h(w) = h(a_1)h(a_2)...h(a_n)$.
- Morfismus jazyka $h(L)$ pak definujeme jako $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

❖ Morfismus jazyků je zvláštní případ substituce, kde každý substituovaný jazyk má právě jednu větu.

Uzavřenost vůči substituci

Věta 6.2 Třída bezkontextových jazyků je uzavřena vůči substituci.

Důkaz.

- Ve shodě s definicí substituce nechť $\Sigma = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ je abeceda bezkontextového jazyka L a L_a pro $a \in \Sigma$ libovolné bezkontextové jazyky. Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ a $G_a = (N_a, \Sigma_a, P_a, S_a)$ pro $a \in \Sigma$ jsou gramatiky, pro které $L = L(G)$ a $L_a = L(G_a)$ pro $a \in \Sigma$.
- Předpokládejme, že $N \cap N_a = \emptyset$ a $N_a \cap N_b = \emptyset$ pro každé $a, b \in \Sigma$, $a \neq b$. Sestrojme gramatiku $G' = (N', \Sigma', P', S)$ takto:
  1. $N' = N \cup \bigcup_{a \in \Sigma} N_a$.
  2. $\Sigma' = \bigcup_{a \in \Sigma} \Sigma_a$.
  3. Nechť h je morfismus na $N \cup \Sigma$ takový, že
     - $h(A) = A$ pro $A \in N$ a
     - $h(a) = S_a$ pro $a \in \Sigma$

     a nechť $P' = \{A \to h(\alpha) \mid (A \to \alpha) \in P\} \cup \bigcup_{a \in \Sigma} P_a$.
- Uvažujme libovolnou větu $a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_m} \in L$ a věty $x_j \in L_{a_j}$, $1 \leq j \leq m$. Pak $S \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} S_{a_{i_1}} S_{a_{i_2}} .... S_{a_{i_m}} \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} x_1 S_{a_{i_2}} .... S_{a_{i_m}} \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} ... \overset{*}{\underset{G'}{\Rightarrow}} x_1 x_2 ... x_m$ a tedy $L' \subseteq L(G')$. Podobně $L(G') \subseteq L'$. $\square$

Důkaz uzavřenosti $\mathcal{L}_2$ jazyků

Nechť L_a a L_b jsou bezkontextové jazyky.

1. Uzavřenost vůči $\cup$ plyne ze substituce L_a, L_b do jazyka $\{a, b\}$.
2. Uzavřenost vůči $.$ plyne ze substituce L_a, L_b do jazyka $\{ab\}$.
3. Uzavřenost vůči $*$ plyne ze substituce L_a do jazyka $\{a\}^*$.
4. Uzavřenost vůči $+$ plyne ze substituce L_a do jazyka $\{a\}^+$.
5. Nechť h je daný morfismus a $L'_a = \{h(a)\}$ pro $a \in \Sigma$. Substitucí jazyků L'_a do jazyka L získáme jazyk $h(L)$.

Věta 6.3 Bezkontextové jazyky jsou uzavřeny vzhledem k průniku s regulárními jazyky.

Důkaz. Snadno zkonstruujeme ZA přijímající příslušný průnik – konstruujeme průnik na konečném řízení, zásobníkové operace zůstávají. □

Neuzavřenost $\mathcal{L}_2$ vůči průniku a doplňku

Věta 6.4 Bezkontextové jazyky *nejsou* uzavřeny vůči průniku a doplňku.

Důkaz.

1. Neuzavřenost vůči $\cap$:
   Uvažujme jazyky $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid n, m \geq 1\}$ a $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\}$, které jsou oba bezkontextové. Ovšem $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$, což není bezkontextový jazyk (lze ukázat např. pomocí Pumping lemmatu).
2. Neuzavřenost vůči doplňku: Předpokládejme, že bezk. jazyky jsou uzavřeny vůči doplňku. Z De Morganových zákonů (a z uzavřenosti vůči sjednocení) pak ovšem plyne uzavřenost vůči průniku $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$, což je spor.

$\square$

Rozhodnutelné problémy pro $\mathcal{L}_2$

Věta 6.5 Následující problémy jsou rozhodnutelné, tj. jsou algoritmicky řešitelné:

1. problém neprázdnosti jazyka $L(G)$ pro libovolnou bezkontextovou gramatiku G,
2. problém příslušnosti řetězce $w \in \Sigma^*$ do jazyka $L(G)$ pro libovolnou bezkontextovou gramatiku G,
3. problém konečnosti jazyka $L(G)$ pro libovolnou bezkontextovou gramatiku G.

Důkaz.

1. K rozhodování neprázdnosti lze využít algoritmus iterativně určující množinu N_t nonterminálů generujících terminální řetězce uvedený v přednášce 4. Pak $L(G) \neq \emptyset \Leftrightarrow S \in N_t$.
2. U problému příslušnosti řetězce můžeme např. určit průnik NZA s KA přijímajícím právě řetězec w a pak ověřit neprázdnost.

Důkaz pokračuje dále.

Pokračování důkazu.

3. Problém konečnosti můžeme rozhodovat na základě platnosti Pumping lemma pro CFL:
   - Dle Pumping lemma pro bezkontextové jazyky existuje pro každý bezkontextový jazyk L konstanta $k \in \mathbb{N}$ taková, že každou větu $w \in L$, $|w| \geq k$, můžeme rozepsat jako $uvwxy$, kde $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq k$, a $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i wx^i y \in L$.
   - Pro testování konečnosti tedy postačí ověřit, že žádný řetězec ze Σ^* o délce mezi k a $2k-1$ nepatří do daného jazyka:
     - Pokud takový řetězec existuje, může být „napumpován“ a dostáváme nekonečně mnoho řetězců patřících do daného jazyka.
     - Jestliže takový řetězec neexistuje, $k-1$ je horní limit délky řetězců L.
     - Pokud by existoval řetězec délky $2k$ nebo větší patřící do L, můžeme v něm podle Pumping lemma najít vwx a vypustit vx. Vzhledem k tomu, že $0 < |vx| \leq k$, postupným opakováním vypouštění bychom se dostali k nutné existenci řetězce z L o délce mezi k a $2k-1$.
   - K určení konstanty k postačí reprezentovat L pomocí bezkontextové gramatiky v CNF s n nonterminály a zvolit $k = 2^n$ (viz důkaz Pumping lemma).

$\square$

Nerozhodnutelné problémy pro $\mathcal{L}_2$

Věta 6.6 Následující problémy jsou nerozhodnutelné, tj. nejsou algoritmicky řešitelné:

1. problém ekvivalence jazyků bezkontextových gramatik, tj. otázka, zda $L(G_1) = L(G_2)$ pro dvě bezkontextové gramatiky G_1, G_2,
2. problém inkluze jazyků bezkontextových gramatik, tj. otázka, zda $L(G_1) \subseteq L(G_2)$ pro dvě bezkontextové gramatiky G_1, G_2.

Důkaz. Důkaz lze vést pomocí techniky redukce. Více v pozdějších přednáškách o nerozhodnutelnosti. $\square$

Regularita

Definice 6.3 Bezkontextová gramatika $G = (N, \Sigma, P, S)$ má vlastnost sebevložení, jestliže existují $A \in N$ a $u, v \in \Sigma^+$ takové, že $A \Rightarrow^+ uAv$ a A není zbytečný nonterminál. Bezkontextový jazyk má vlastnost sebevložení, jestliže každá gramatika, která jej generuje, má vlastnost sebevložení.

Věta 6.7 Bezkontextový jazyk má vlastnost sebevložení právě tehdy, když není regulární.

Důkaz. Můžeme využít GNF – blíže viz doporučená literatura. □

❖ Problém, zda daná bezkontextová gramatika generuje regulární jazyk, není algoritmicky rozhodnutelný.

Deterministické zásobníkové automaty

Deterministický zásobníkový automat

Definice 6.4 Zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$ nazýváme deterministický zásobníkový automat (DZA), jestliže pro každé $q \in Q$ a $z \in \Gamma$ platí buď

- $\forall a \in \Sigma : |\delta(q, a, z)| \leq 1 \land \delta(q, \varepsilon, z) = \emptyset$, nebo
- $\forall a \in \Sigma : \delta(q, a, z) = \emptyset \land |\delta(q, \varepsilon, z)| \leq 1$.

Definice 6.5 Nechť $L = L(P)$, kde P je deterministický zásobníkový automat. Jazyk L se pak nazývá deterministickým bezkontextovým jazykem.

Příklad 6.2 Uvažujme gramatiku $G = (\{X, Y\}, \{a, b, c\}, P, X)$ s pravidly:

$$\begin{array}{lcl} X & \longrightarrow & aXa \mid cYc \mid b \\ Y & \longrightarrow & aYbX \mid c \end{array}$$

Jedná se o LL(1) gramatiku a tudíž můžeme sestrojit DZA
$P = (\{q\}, \{a, b, c\}, \{X, Y, a, b, c\}, \delta, q, X, \emptyset)$ takový, že $L(G) = L(P)$ a provádí $LL(1)$ analýzu :

$$\begin{array}{lll} \delta: & \delta(q, a, X) = (q, Xa) & \delta(q, c, Y) = (q, \varepsilon) \\ & \delta(q, b, X) = (q, \varepsilon) & \delta(q, a, a) = (q, \varepsilon) \\ & \delta(q, c, X) = (q, Yc) & \delta(q, b, b) = (q, \varepsilon) \\ & \delta(q, a, Y) = (q, YbX) & \delta(q, c, c) = (q, \varepsilon) \end{array}$$

Skutečně, např. derivaci $X \Rightarrow aXa \Rightarrow aba$ odpovídá přijímající posloupnost konfigurací $(a, aba, X) \vdash (q, ba, Xa) \vdash (q, a, a) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

Neekvivalence NZA a DZA

Věta 6.8 DZA mají striktně menší vyjadřovací sílu než NZA.

Důkaz. (idea) Bezkontextový jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^+\}$ nelze přijímat žádným DZA. Neformálně řečeno, DZA nemá možnost uhádnout, kdy končí w a začíná w^R. $\square$

❖ *Poznámka:* Jiná možnost důkazu věty je přes následně uvedenou uzavřenost jazyků DZA vůči doplňku a přes uvážení, že $\overline{\{a^n b^n c^n | n \geq 1\}}$ je bezkontextový jazyk.

❖ Problém, zda daný bezkontextový jazyk je jazykem nějakého DZA, není obecně rozhodnutelný (podobně jako není rozhodnutelná víceznačnost).

Vlastnosti jazyků DZA

Věta 6.9 Jazyky DZA jsou uzavřeny vůči:

1. průniku s regulárními jazyky,
2. doplňku.

Důkaz. (idea) Bod 1 dokážeme podobně jako u NZA. U bodu 2 postupujeme podobně jako u DKA – použijeme záměnu koncových a nekoncových stavů, musíme ale navíc řešit dva okruhy problémů: (a) DZA nemusí vždy dočíst vstupní slovo až do konce (buď se dostane do konfigurace, z níž nemůže pokračovat, nebo cyklí přes ε-kroky) a (b) DZA slovo dočte do konce, ale pak ještě provede posloupnost ε-kroků jdoucích přes koncové i nekoncové stavy. Popis řešení těchto problémů je možno nalézt v doporučené literatuře.□

Věta 6.10 Jazyky DZA *nejsou* uzavřeny vůči:

1. průniku,
2. sjednocení.

Důkaz. U bodu 1 použijeme stejný postup jako u NZA (uvědomíme si, že $\{a^m b^m c^n \mid n, m \geq 1\}$ a $\{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1\}$ lze přijímat DZA). Bod 2 plyne z De Morganových zákonů. □

Věta 6.11 Jazyky DZA *nejsou* uzavřeny vůči:

1. konkatenaci,
2. iteraci.

* *Důkaz.* (idea) Vyjdeme z toho, že zatímco jazyky $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 1\}$ a $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 1\}$ jsou deterministické bezkontextové, jazyk $L_1 \cup L_2$ ne. (Intuitivně DZA nemůže odhadnout, zda má kontrolovat první nebo druhou rovnost, a tedy, zda na zásobník ukládat symboly a nebo b.)

1. Neuzavřenost vůči konkatenaci. Jazyk $L_3 = 0L_1 \cup L_2$ je zřejmě deterministický bezkontextový. Jazyk 0^* je také deterministický bezkontextový (dokonce regulární), ovšem není těžké nahlédnout, že $0^* L_3$ není deterministický bezkontextový. Stačí uvážit, že $0a^*b^*c^*$ je deterministický bezkontextový (dokonce regulární) jazyk a $0^* L_3 \cap 0a^*b^*c^* = 0L_1 \cup 0L_2 = 0(L_1 \cup L_2)$.
2. Neuzavřenost vůči iteraci. Uvážíme $(\{0\} \cup L_3)^* \cap 0a^+b^+c^+ = 0(L_1 \cup L_2)$.

$\square$ *

Některé další zajímavé vlastnosti bezkontextových jazyků

Teorém Chomského a Schützenbergera

❖ Tento teorém postihuje úzkou vazbu bezkontextových jazyků na závorkování.

Definice 6.6 Označme ZAV_n pro $n \geq 0$ jazyky sestávající ze všech vyvážených řetězců závorek n typů. Tyto jazyky – označované též jako Dyckovy jazyky – jsou generovány gramatikami s pravidly tvaru:

$$S \rightarrow [^1\ S\ ]^1 \mid [^2\ S\ ]^2 \mid \ldots \mid [^n\ S\ ]^n \mid SS \mid \varepsilon$$

Věta 6.12 (Chomsky-Schützenberger) Každý bezkontextový jazyk je morfismem průniku nějakého jazyka závorek a nějaké regulární množiny. Jinými slovy, pro každý $L \in \mathcal{L}_2$ existují $n \geq 0$, regulární množina R a morfismus h takový, že

$$L = h(ZAV_n \cap R)$$

Důkaz. Viz doporučená literatura. □

Parikhův teorém

❖ Tento teorém opět postihuje strukturu bezkontextových jazyků – zabývá se tím, co dostaneme, pokud ve větách odhlédneme od pořadí jednotlivých symbolů a zkoumáme pouze počet jejich opakování (tj. zahrneme vlastně libovolné přeházení znaků v řetězci).

Definice 6.7 Mějme abecedu $\Sigma = \{a_1, ..., a_k\}$. Parikhova funkce je funkce $\psi : \Sigma^* \to \mathbb{N}^k$ definovaná pro $w \in \Sigma^*$ jako $\psi(w) = (\#a_1(w), ..., \#a_k(w))$, kde $\#a_i(w)$ udává počet výskytů symbolu a_i ve w.

Definice 6.8 Podmnožinu množiny vektorů $\mathbb{N}^k$ nazveme lineární množinou, je-li dána bází $u_0 \in \mathbb{N}^k$ a periodami $u_1, ..., u_m \in \mathbb{N}^k$ jako $\{u_0 + a_1 u_1 + ... + a_m u_m \mid a_1, ..., a_m \in \mathbb{N}\}$. Podmnožinu $\mathbb{N}^k$ nazveme semilineární množinou, je-li sjednocením konečného počtu lineárních množin.

Věta 6.13 (Parikh) Pro libovolný bezkontextový jazyk L, $\psi(L)$ je semilineární množina.

Důkaz. Viz doporučená literatura. □

- Ke každé semilineární množině S můžeme najít regulární množinu $R \subseteq \Sigma^*$ takovou, že $\psi(R) = S$.

- Proto bývá Parikhův teorém někdy formulován takto: Komutativní obraz každého bezkontextového jazyka odpovídá nějakému regulárnímu jazyku.

- Semilineární množiny se navíc dají reprezentovat konečnými automaty přímo jako množiny číselných vektorů v binárním kódování (tzv. *NDDs – number decision diagrams*).