Meze rozhodnutelnosti

Existují jazyky (problémy), jež nejsou rekurzivně vyčíslitelné (částečně rozhodnutelné)?

Které jazyky, resp. problémy, nejsou rekurzívní (rozhodnutelné)?

Jazyky mimo třídu 0

Existence jazyků mimo třídu 0

Věta 9.1 Pro každou abecedu Σ existuje jazyk nad Σ, který není typu 0 (tj. rekurzívně vyčíslitelný).

Důkaz.

1. Libovolný jazyk typu 0 nad Σ může být přijat TS s $\Gamma = \Sigma \cup \{\Delta\}$: Pokud M používá více symbolů, můžeme je zakódovat jako jisté posloupnosti symbolů ze $\Sigma \cup \{\Delta\}$ a sestrojit TS M', který simuluje M.
2. Nyní můžeme snadno systematicky vypisovat všechny TS s $\Gamma = \Sigma \cup \{\Delta\}$. Začneme stroji se dvěma stavy, pak se třemi stavy, ...
   Závěr: Množina všech takových strojů a tedy i jazyků typu 0 je spočetná.
3. Množina Σ^* ale obsahuje nekonečně mnoho řetězců a proto je množina 2^{Σ^*} zahrnující všechny jazyky nespočetná – důkaz viz další strana.
4. Z rozdílnosti mohutností spočetných a nespočetných množin plyne platnost uvedené věty.

$\square$

Lemma 9.1 Pro neprázdné, konečné Σ je množina 2^{Σ^*} nespočetná.

Důkaz. Důkaz provedeme tzv. diagonalizací (poprvé použitou Cantorem při důkazu rozdílné mohutnosti $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$).

- Předpokládejme, že 2^{Σ^*} je spočetná. Pak dle definice spočetnosti existuje bijekce $f : \mathbb{N} \longleftrightarrow 2^{\Sigma^*}$.
- Uspořádejme Σ^* do nějaké posloupnosti $w_1, w_2, w_3, \ldots$, např. ε, x, y, xx, xy, yx, yy, xxx, ... pro $\Sigma = \{x, y\}$. Nyní můžeme f zobrazit nekonečnou maticí:

$$\begin{array}{lcccccc} & w_0 & w_1 & w_2 & \ldots & w_i & \ldots \\ L_0 = f(0) & a_{00} & a_{01} & a_{02} & \ldots & a_{0i} & \ldots \\ L_1 = f(1) & a_{10} & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\ L_2 = f(2) & a_{20} & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} & \ldots \\ \ldots & & & & & & \end{array}, \text{ kde } a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ jestliže } w_j \notin L_i, \\ 1, \text{ jestliže } w_j \in L_i. \end{cases}$$

- Uvažujme jazyk $\overline{L} = \{w_i \mid a_{ii} = 0\}$. $\overline{L}$ se liší od každého jazyka $L_i = f(i)$, $i \in \mathbb{N}$:
  - je-li $a_{ii} = 0$, pak w_i patří do jazyka,
  - je-li $a_{ii} = 1$, pak w_i nepatří do jazyka.
- Současně ale $\overline{L} \in 2^{\Sigma^*}$, f tudíž není surjektivní, což je spor.

$\square$

Problém zastavení

Problém zastavení TS

Věta 9.2 **Problém zastavení TS (Halting Problem)**, kdy nás zajímá, zda daný TS M pro danou vstupní větu w zastaví, **není rozhodnutelný**, ale je **částečně rozhodnutelný**.

Důkaz.

- Problému zastavení odpovídá rozhodování jazyka $HP = \{\langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid M \text{ zastaví při } w\}$, kde $\langle M \rangle$ je kód TS M a $\langle w \rangle$ je kód w.
- Částečnou rozhodnutelnost ukážeme snadno použitím modifikovaného T_U, který zastaví přijetím vstupu $\langle M \rangle \# \langle w \rangle$ právě tehdy, když M zastaví při w – modifikace spočívá v převedení abnormálního zastavení při simulaci na zastavení přechodem do q_F.
- Nerozhodnutelnost ukážeme pomocí diagonalizace:
  1. Pro $x \in \{0,1\}^*$, nechť M_x je TS s kódem x, je-li x legální kód TS. Jinak ztotožníme M_x s pevně zvoleným TS, např. TS, který pro libovolný vstup okamžitě zastaví.
  2. Můžeme nyní sestavit posloupnost $M_\varepsilon, M_0, M_1, M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}, M_{000}, \ldots$ zahrnující všechny TS nad $\Sigma = \{0,1\}$ indexované řetězci z $\{0,1\}^*$.

Důkaz pokračuje dále.

Pokračování důkazu.

3. Uvažme nekonečnou matici

$$
\begin{array}{lllllll}
 & \varepsilon & 0 & 1 & 00 & 01 & 10 \quad \ldots \\
M_\varepsilon & H_{M_\varepsilon,\varepsilon} & H_{M_\varepsilon,0} & H_{M_\varepsilon,1} & H_{M_\varepsilon,00} & H_{M_\varepsilon,01} & \ldots \\
M_0 & H_{M_0,\varepsilon} & H_{M_0,0} & H_{M_0,1} & H_{M_0,00} & H_{M_0,01} & \ldots \\
M_1 & H_{M_1,\varepsilon} & H_{M_1,0} & H_{M_1,1} & H_{M_1,00} & H_{M_1,01} & \ldots \\
M_{00} & H_{M_{00},\varepsilon} & H_{M_{00},0} & H_{M_{00},1} & H_{M_{00},00} & H_{M_{00},01} & \ldots \\
M_{01} & H_{M_{01},\varepsilon} & H_{M_{01},0} & H_{M_{01},1} & H_{M_{01},00} & H_{M_{01},01} & \ldots \\
\ldots & & & & & &
\end{array}
$$

kde $H_{M_x,y} = \begin{cases} \textbf{C}, \text{ jestliže } M_x \text{ cyklí na } y, \\ \textbf{Z}, \text{ jestliže } M_x \text{ zastaví na } y. \end{cases}$

4. Předpokládejme, že existuje *úplný* TS K přijímající jazyk HP, tj. K pro vstup $\langle M\rangle\#\langle w\rangle$
   - zastaví normálně (přijme) právě tehdy, když M zastaví na w,
   - zastaví abnormálně (odmítne) právě tehdy, když M cyklí na w.
5. Sestavíme TS N, který pro vstup $x \in \{0,1\}^*$:
   - Sestaví M_x z x a zapíše $\langle M_x\rangle\#x$ na svou pásku.
   - Simuluje K na $\langle M_x\rangle\#x$, přijme, pokud K odmítne, a přejde do nekonečného cyklu, pokud K přijme.

Důkaz pokračuje dále.

Pokračování důkazu.

Všimněme si, že N v podstatě komplementuje diagonálu uvedené matice:

$$\begin{array}{lllllll}
 & \varepsilon & 0 & 1 & 00 & 01 & 10 \quad \ldots \\
M_\varepsilon & H_{M_\varepsilon,\varepsilon} & H_{M_\varepsilon,0} & H_{M_\varepsilon,1} & H_{M_\varepsilon,00} & H_{M_\varepsilon,01} & \ldots \\
M_0 & H_{M_0,\varepsilon} & H_{M_0,0} & H_{M_0,1} & H_{M_0,00} & H_{M_0,01} & \ldots \\
M_1 & H_{M_1,\varepsilon} & H_{M_1,0} & H_{M_1,1} & H_{M_1,00} & H_{M_1,01} & \ldots \\
M_{00} & H_{M_{00},\varepsilon} & H_{M_{00},0} & H_{M_{00},1} & H_{M_{00},00} & H_{M_{00},01} & \ldots \\
M_{01} & H_{M_{01},\varepsilon} & H_{M_{01},0} & H_{M_{01},1} & H_{M_{01},00} & H_{M_{01},01} & \ldots \\
\ldots & & & & & &
\end{array}$$

6. Dostáváme, že

   N zastaví na x $\Leftrightarrow$ K odmítne $\langle M_x \rangle \# \langle x \rangle$ (definice N)

   $\Leftrightarrow$ M_x cyklí na x (předpoklad o K).

7. To ale znamená, že N se liší od každého M_x alespoň na jednom řetězci – konkrétně x. Což je ovšem spor s tím, že posloupnost $M_\varepsilon, M_0, M_1, M_{00}, M_{01}, M_{10}, M_{11}, M_{000}, \ldots$ zahrnuje všechny TS nad $\Sigma = \{0, 1\}$. Tento spor plyne z předpokladu, že existuje TS K, který pro daný TS M a daný vstup x určí (rozhodne), zda M zastaví na x, či nikoliv.

$\square$

❖ Ukázali jsme, že problém zastavení TS je částečně rozhodnutelný a tedy jazyk HP rekurzívně vyčíslitelný. Z věty 8.6 pak plyne, že **komplement problému zastavení** není ani částečně rozhodnutelný a jazyk co-$HP = \{\langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid M$ nezastaví při $w\}$ je příkladem jazyka, jenž není ani rekurzívně vyčíslitelný.

S dalším příkladem takového jazyka se seznámíme v následujícím problému.

Redukce

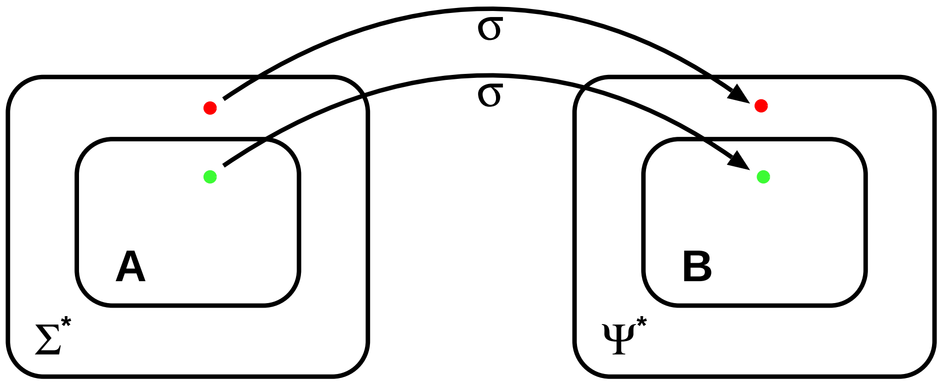
Důkaz nerozhodnutelnosti redukcí

❖ Technika redukce patří spolu s diagonalizací k nejpoužívanějším technikám důkazu, že nějaký problém není rozhodnutelný (částečně rozhodnutelný) – neboli, že určitý jazyk není rekurzívní (rekurzívně vyčíslitelný):

- víme, že jazyk A není rekurzívní (rekurzívně vyčíslitelný),
- zkoumáme jazyk B,
- ukážeme, že A lze úplným TS převést (redukovat) na B,
- to ale znamená, že B rovněž není rekurzívní (rekurzívně vyčíslitelný) – jinak by šlo použít úplný TS (ne-úplný TS) přijímající B a příslušné redukce k sestavení úplného TS (ne-úplného TS) přijímajícího A, což by byl spor.

❖ Argumentace výše samozřejmě ukazuje, že redukci lze použít i při dokazování, že určitý problém je rekurzívní (částečně rekurzívní).

Definice 9.1 Nechť A, B jsou jazyky, $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Psi^*$. Redukce jazyka A na jazyk B je totální, rekurzívně vyčíslitelná funkce $\sigma : \Sigma^* \to \Psi^*$ taková, že $\forall w \in \Sigma^*. w \in A \Leftrightarrow \sigma(w) \in B$.



❖ Existuje-li redukce jazyka A na B, říkáme, že A je redukovatelný na B, což značíme $A \leq B$.

Věta 9.3 Nechť $A \leq B$.

1. Není-li jazyk A rekurzívně vyčíslitelný, pak ani jazyk B není rekurzívně vyčíslitelný.
2. Není-li jazyk A rekurzívní, pak ani jazyk B není rekurzívní.

$\overline{1}$. Je-li jazyk B rekurzívně vyčíslitelný, pak i jazyk A je rekurzívně vyčíslitelný.

$\overline{2}$. Je-li jazyk B rekurzívní, pak i jazyk A je rekurzívní.

Důkaz. Dokážeme, že pokud $A \leq B$, pak ($\overline{1}$) je-li jazyk B rekurzívně vyčíslitelný, pak i jazyk A je rekurzívně vyčíslitelný:

- Nechť M_R je úplný TS počítající redukci σ z A na B a M_B je TS přijímající B.
- Sestrojíme M_A přijímající A:
  1. M_A simuluje M_R na vstupu w, což transformuje obsah pásky na $\sigma(w)$.
  2. M_A simuluje výpočet M_B na $\sigma(w)$.
  3. Pokud M_B zastaví a přijme, M_A rovněž zastaví a přijme, jinak M_A zastaví abnormálně nebo cyklí.
- Zřejmě platí:

$$\begin{array}{lcll} M_A \text{ přijme } w & \Leftrightarrow & M_B \text{ přijme } \sigma(w) & \\ & \Leftrightarrow & \sigma(w) \in B & \\ & \Leftrightarrow & w \in A & \text{(definice redukce).} \end{array}$$

Tvrzení (1) je kontrapozicí ($\overline{1}$); tvrzení ($\overline{2}$) dokážeme podobně jako ($\overline{1}$) při použití úplného TS M_B; tvrzení (2) je kontrapozicí ($\overline{2}$).

Kontrapozice: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ (Modus tollens)

$\square$

Problém náležitosti a další problémy

Problém náležitosti pro $\mathcal{L}_0$

Věta 9.4 **Problém náležitosti (Membership Problem)** řetězce w do jazyka L typu 0 **není rozhodnutelný**, ale **je částečně rozhodnutelný**.

Důkaz. Částečná rozhodnutelnost je zřejmá: jednoduše použijeme T_U, který bude simulovat TS M, $L(M) = L$, nad daným řetězcem w. Nerozhodnutelnost ukážeme redukcí z problému zastavení:

- Libovolný TS M můžeme snadno upravit na M', který přijme w právě tehdy, když M zastaví na vstup w přijetím nebo odmítnutím w: postačí dodat veškeré „chybějící“ přechody jejich svedením do q_F, dodat počáteční poznačení levého okraje unikátním symbolem a přechod do q_F kdykoliv se hlava posune na tento symbol.
- Uvedenou transformaci lze zřejmě snadno realizovat na úrovni kódů Turingových strojů *úplným TS* – ten tak bude implementovat redukci jazyka HP na jazyk $MP = \{\langle M'' \rangle \# \langle w'' \rangle \mid w'' \in L(M'')\}$.
- Jsme tedy schopni redukovat HP úplným TS na MP a současně víme, že HP není rekurzívní. Dle věty 10.3 (2) tedy máme, že MP není rekurzívní a tedy problém náležitosti pro jazyky typu 0 není rozhodnutelný.

$\square$

- Podobně jako u problému zastavení nyní z věty 8.6 plyne, že
  - **komplement problému náležitosti** není ani částečně rozhodnutelný a
  - jazyk co-$MP = \{\langle M''\rangle\#\langle w''\rangle \mid w'' \notin L(M'')\}$ je dalším příkladem jazyka, jenž není ani rekurzívně vyčíslitelný.

Příklady dalších problémů pro TS

❖ Konstrukcí příslušného úplného TS (a v případě složitější konstrukce důkazem její korektnosti) lze ukázat, že např. následující problémy jsou rozhodnutelné:

- Daný TS má alespoň 2005 stavů.
- Daný TS učiní více než 2005 kroků na vstupu ε.
- Daný TS učiní více než 2005 kroků na *nějakém* vstupu.

❖ Konstrukcí příslušného (ne-úplného) TS a důkazem nerekurzívnosti redukcí lze ukázat, že např. následující problémy jsou částečně rozhodnutelné:

- Jazyk daného TS je neprázdný.
- Jazyk daného TS obsahuje alespoň 2005 slov.

❖ Důkazem redukcí, že jazyky odpovídající následujícím problémům nejsou ani parciálně rekurzívní lze ukázat, že např. následující problémy nejsou ani částečně rozhodnutelné:

- Jazyk daného TS je prázdný.
- Jazyk daného TS obsahuje nanejvýš 2005 slov.
- Jazyk daného TS je konečný (regulární, bezkontextový, kontextový, rekurzívní).

Postův korespondenční problém

Postův korespondenční problém

Definice 9.2

- Postův systém nad abecedou Σ je dán neprázdným seznamem S dvojic neprázdných řetězců nad Σ, $S = \langle(\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_k, \beta_k)\rangle$, $\alpha_i, \beta_i \in \Sigma^+$, $k \geq 1$.
- Řešením Postova systému je každá neprázdná posloupnost přirozených čísel $I = \langle i_1, i_2, ..., i_m\rangle$, $1 \leq i_j \leq k$, $m \geq 1$, taková, že:

$$\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_m} = \beta_{i_1}\beta_{i_2}...\beta_{i_m}$$

  (Pozor: m není omezené a indexy se mohou opakovat!)
- Postův problém (PCP) zní: Existuje pro daný Postův systém řešení?

Příklad 9.1

- Uvažujme Postův systém $S_1 = \{(b, bbb), (babbb, ba), (ba, a)\}$ nad $\Sigma = \{a, b\}$. Tento systém má řešení $I = \langle 2, 1, 1, 3\rangle$: $babbb\ b\ b\ ba = ba\ bbb\ bbb\ a$.
- Naopak Postův systém $S_2 = \{(ab, abb), (a, ba), (b, bb)\}$ nad $\Sigma = \{a, b\}$ nemá řešení, protože $|\alpha_i| < |\beta_i|$ pro $i = 1, 2, 3$.

Nerozhodnutelnost PCP

Věta 9.5 **Postův korespondenční problém je nerozhodnutelný.**

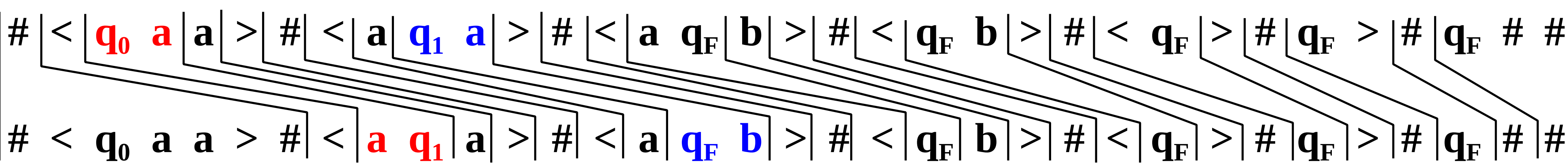
Důkaz. *(Idea) Dá se ukázat, že nerozhodnutelnost PCP plyne z nerozhodnutelnosti tzv. iniciálního PCP, u kterého požadujeme, aby řešení začínalo vždy jedničkou. Nerozhodnutelnost iniciálního PCP se dá ukázat redukcí z problému náležitosti pro TS:

- Konfiguraci výpočtu TS lze zakódovat do řetězce: použitý obsah pásky ohraničíme speciálními značkami (a jen ten si pamatujeme), řídicí stav vložíme na aktuální pozici hlavy na pásce.
- Posloupnost konfigurací TS při přijetí řetězce budeme reprezentovat jako konkatenaci řetězců, která vzniká řešením PCP.
- Jedna z uvažovaných konkatenací bude celou dobu (až na poslední fázi) delší: na začátku bude obsahovat počáteční konfiguraci a pak bude vždy o krok napřed. V posledním fázi výpočtu konkatenace „zarovnáme“ (bude-li možné výpočet simulovaného TS ukončit přijetím).
- Výpočet TS budeme modelovat tak, že vždy jednu konkatenaci postupně prodloužíme o aktuální konfiguraci simulovaného TS a současně v druhé konkatenaci vygenerujeme novou konfiguraci TS.

Důkaz pokračuje dále.

Pokračování důkazu.

- Jednotlivé dvojice PCP budou modelovat následující kroky:
  - Vložení počáteční konfigurace simulovaného TS do jedné z konkatenací např. pravostranné $(\#, \#$počáteční_konfigurace$)$, $\# \notin \Gamma$ používáme jako oddělovač konfigurací.
  - Kopírování symbolů na pásce před a po aktuální pozici hlavy (z, z) pro každé $z \in \Gamma \cup \{\#, <, >\}$, kde $<, >$ ohraničují použitou část pásky.
  - Základní změna konfigurace: přepis $\delta(q_1, a) = (q_2, b)$: (q_1a, q_2b), posuv doprava $\delta(q_1, a) = (q_2, R)$: (q_1a, aq_2), posuv doleva $\delta(q_1, b) = (q_2, L)$: (aq_1b, q_2ab) pro každé $a \in \Gamma \cup \{<\}$. Navíc je zapotřebí ošetřit nájezd na $>$: čtení Δ, rozšiřování použité části pásky.
  - Pravidla pro „zarovnání“ obou konkatenací při přijetí: na levé straně umožníme přidat symbol v okolí q_F, aniž bychom ho přidali na pravé straně.
- Simulace výpočtu TS, který načte a, posune hlavu doprava, přepíše a na b a zastaví, na vstupu aa by pak vypadala takto:



- Obecná korektnost konstrukce se dá dokázat indukcí nad délkou výpočtu.

$\square$ *

Nerozhodnutelnost redukcí z PCP

❖ Redukce z PCP (resp. jeho doplňku) se velmi často používají k důkazům, že určitý problém není rozhodnutelný (resp. není ani částečně rozhodnutelný).

❖ Jako příklad uvedeme důkaz faktu, že problém prázdnosti jazyka dané kontextové gramatiky není ani částečně rozhodnutelný:

- Použijeme redukci z komplementu PCP. Redukce přiřadí seznamu $S = (\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_k, \beta_k)$, definujícímu instanci PCP, kontextovou gramatiku G takovou, že PCP založený na S nemá řešení právě tehdy, když $L(G) = \emptyset$.
- Uvažme jazyky L_α, L_β nad $\Sigma \cup \{\#, 1, ..., k\}$ (předp. $\Sigma \cap \{\#, 1, ..., k\} = \emptyset$):
  - $L_\alpha = \{\alpha_{i_1} ... \alpha_{i_m} \# i_m ... i_1 \mid 1 \leq i_j \leq k, j = 1, ..., m, m \geq 1\}$,
  - $L_\beta = \{\beta_{i_1} ... \beta_{i_m} \# i_m ... i_1 \mid 1 \leq i_j \leq k, j = 1, ..., m, m \geq 1\}$.
- Je zřejmé, že L_α, L_β jsou kontextové (dokonce deterministické bezkontextové) a tudíž $L_\alpha \cap L_\beta$ je také kontextový jazyk (věta 8.10) a můžeme tedy efektivně sestavit gramatiku G, která tento jazyk generuje (např. konstrukcí přes LOA).
- $L_\alpha \cap L_\beta$ zřejmě obsahuje právě řetězce $u\#v$, kde v odpovídá reverzi řešení dané instance PCP.
- Hledaná redukce tedy přiřadí dané instanci PCP gramatiku G. $\square$

Souhrn některých vlastností jazyků

❖ Uvedeme nyní souhrn některých důležitých vlastností různých tříd jazyků; některé jsme dokázali, důkazy jiných lze nalézt v literatuře[a] (u otázek nerozhodnutelnosti se často užívá redukce z PCP) – R = rozhodnutelný, N = nerozhodnutelný, A = vždy splněno:

	Reg	DCF	CF	CS	Rec	RE
$w \in L(G)$?	R	R	R	R	R	N
$L(G)$ prázdný? konečný?	R	R	R	N	N	N
$L(G) = \Sigma^*$?	R	R	N	N	N	N
$L(G) = R$, $R \in \mathcal{L}_3$?	R	R	N	N	N	N
$L(G_1) = L(G_2)$?	R	R	N	N	N	N
$L(G_1) \subseteq L(G_2)$?	R	N	N	N	N	N
$L(G_1) \in \mathcal{L}_3$?	A	R	N	N	N	N
$L(G_1) \cap L(G_2)$ je stejného typu?	A	N	N	A	A	A
$L(G_1) \cup L(G_2)$ je stejného typu?	A	N	A	A	A	A
Komplement $L(G)$ je stejného typu?	A	A	N	A	A	N
$L(G_1).L(G_2)$ je stejného typu?	A	N	A	A	A	A
$L(G)^*$ je stejného typu?	A	N	A	A	A	A
Je G víceznačná?	R	N	N	N	N	N

[a] Např. I. Černá, M. Křetínský, A. Kučera. Automaty a formální jazyky I. FI MU, 1999.

Riceova věta

Nerozhodnutelnost je pravidlo, ne výjimka.

Riceova věta – první část

Věta 9.6 ***Každá* netriviální vlastnost rekurzívně vyčíslitelných jazyků je nerozhodnutelná.**

Definice 9.3 Budiž dána abeceda Σ. Vlastnost rekurzívně vyčíslitelných množin je zobrazení P : { rekurzívně vyčíslitelné podmnožiny množiny Σ^* } $\rightarrow \{\perp, \top\}$, kde $\top$, resp. $\perp$ reprezentují pravdu, resp. nepravdu.

Příklad 9.2 Vlastnost prázdnosti můžeme reprezentovat jako zobrazení

$$P(A) = \begin{cases} \top, \text{ jestliže } A = \emptyset, \\ \perp, \text{ jestliže } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

❖ Zdůrazněme, že nyní mluvíme o vlastnostech rekurzívně vyčíslitelných množin, *nikoliv* TS, které je přijímají – následující vlastnosti tedy nejsou vlastnostmi r. v. množin:

- TS M má alespoň 2005 stavů.
- TS M zastaví na všech vstupech.

Definice 9.4 Vlastnost rekurzívně vyčíslitelných množin je netriviální, pokud není vždy pravdivá ani vždy nepravdivá.

Důkaz 1. části Riceovy věty

Důkaz.

- Nechť P je netriviální vlastnost r.v. množin. Předpokládejme beze ztráty obecnosti, že $P(\emptyset) = \bot$, pro $P(\emptyset) = \top$ můžeme postupovat analogicky.
- Jelikož P je netriviální vlastnost, existuje r.v. množina A taková, že $P(A) = \top$. Nechť K je TS přijímající A.
- Redukujeme HP na $\{\langle M\rangle \mid P(L(M)) = \top\}$. Z $\langle M\rangle\#\langle w\rangle$ sestrojíme $\sigma(\langle M\rangle\#\langle w\rangle) = \langle M'\rangle$, kde M' je 2-páskový TS, který na vstupu x:
  1. Uloží x na 2. pásku.
  2. Zapíše na 1. pásku w – w je „uložen" v řízení M'.
  3. Odsimuluje na 1. pásce M – M je rovněž „uložen" v řízení M'.
  4. Pokud M zastaví na w, odsimuluje K na x a přijme, pokud K přijme.
- Dostáváme:
  - M zastaví na $w \Rightarrow L(M') = A \Rightarrow P(L(M')) = P(A) = \top$,
  - M cyklí na $w \Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow P(L(M')) = P(\emptyset) = \bot$,

  A máme tedy skutečně redukci HP na $\{\langle M\rangle \mid P(L(M)) = \top\}$.
  Protože HP není rekurzivní, není rekurzivní ani $P(L(M))$ a tudíž není rozhodnutelné, zda $L(M)$ splňuje vlastnost P.

$\square$

Riceova věta – druhá část

Definice 9.5 Vlastnost P r.v. množin nazveme monotónní, pokud pro každé dvě r.v. množiny A, B takové, že $A \subseteq B$, $P(A) \Rightarrow P(B)$.

Příklad 9.3 Mezi monotónní vlastnosti patří např.:

- A je nekonečné.
- $A = \Sigma^*$.

Naopak mezi nemonotónní vlastnosti patří např.:

- A je konečné.
- $A = \emptyset$.

Věta 9.7 ***Každá* netriviální nemonotónní vlastnost rekurzívně vyčíslitelných jazyků není ani částečně rozhodnutelná.**

Důkaz. Redukcí z co-HP – viz např. D. Kozen. Automata and Computability. $\square$

Alternativy k TS

Některé alternativy k TS

❖ Mezi výpočetní mechanismy mající ekvivalentní výpočetní sílu jako TS patří např. automaty s (jednou) frontou:

- Uvažme stroj s konečným řízením, (neomezenou) FIFO frontou a přechody na nichž je možno načíst ze začátku fronty a zapsat na konec fronty symboly z frontové abecedy Γ.
- Pomocí „rotace“ fronty je zřejmě možné simulovat pásku TS.

❖ Ekvivalentní výpočetní sílu jako TS mají také zásobníkové automaty se dvěma (a více) zásobníky:

- Intuitivně: obsah pásky simulovaného TS máme v jednom zásobníku; chceme-li ho změnit (obecně nejen na vrcholu), přesuneme část do druhého zásobníku, abychom se dostali na potřebné místo, provedeme patřičnou změnu a vrátíme zpět odloženou část zásobníku.
- Poznámka: rovněž víme, že pomocí dvou zásobníků můžeme implementovat frontu.

❖ Jiným výpočetním modelem s plnou Turingovskou silou jsou automaty s čítači (pro dva a více čítačů) a operacemi $+1$, -1 a test na 0:

- Zmíněné automaty mají konečné řízení a k čítačů, přičemž v každém kroku je možné tyto čítače nezávisle inkrementovat, dekrementovat a testovat na nulu (přechod je podmíněn tím, že jistý čítač obsahuje nulu).
- Pomocí čtyř čítačů je snadné simulovat dva zásobníky:
  - U ZA postačí mít $\Gamma = \{0, 1\}$: různé symboly můžeme kódovat určitým počtem 0 oddělených 1. Obsah zásobníku má pak charakter binárně zapsaného čísla. Vložení 0 odpovídá vynásobení 2, odebrání 0 vydělení 2. Podobně je tomu s vložením/odebráním 1.
  - Binární zásobník můžeme simulovat dvěma čítači: při násobení/dělení 2 odečítáme 1 (resp. 2) z jednoho čítače a přičítáme 2 (resp. 1) k druhému.
- Postačí ovšem i čítače dva:
  - Obsah čtyř čítačů i, j, k, l je možné zakódovat jako $2^i 3^j 5^k 7^l$.
  - Přičtení/odečtení je pak možné realizovat násobením/dělením 2, 3, 5, či 7.

❖ Mezi další Turingovsky úplné výpočetní mechanismy pak patří např. λ-kalkul či parciálně-rekurzívní funkce (viz další přednáška).