Vyčíslitelné funkce

Základy teorie rekurzivních funkcí

Budeme se snažit identifikovat takové funkce, které jsou „spočitatelné“, tj. vyčíslitelné v obecném smyslu (bez ohledu na konkrétní výpočetní systém). Abychom snížili extrémní velikost třídy těchto funkcí, která je dána také varietou definičních oborů a oborů hodnot, omezíme se, uvažujíce možnost kódování, na funkce tvaru:

$$\boxed{f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n}$$

kde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad m, n \in \mathbb{N}$

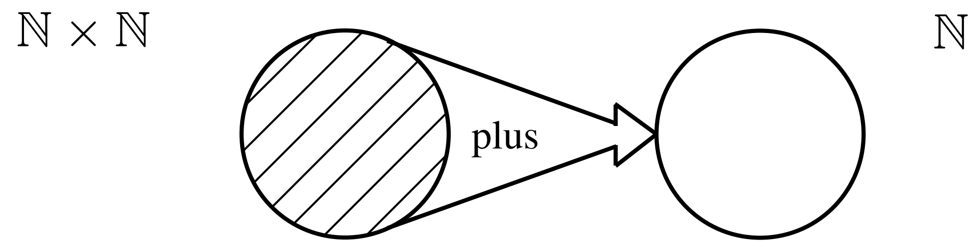
❖ Konvence: n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ budeme označovat jako $\overline{x}$

❖ Klasifikace parciálních funkcí:

- *Totální funkce*
- *Striktně parciální funkce*

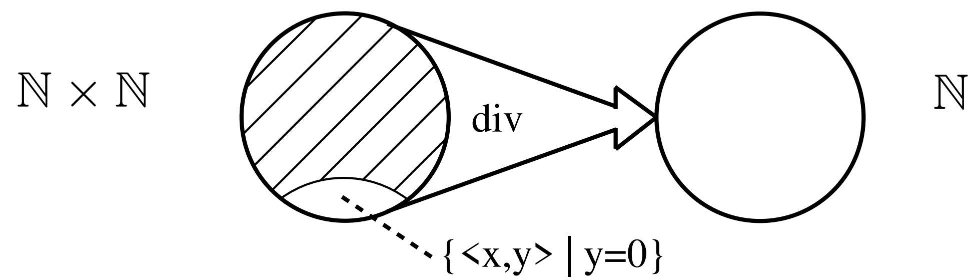
Příklad 11.1 Totální funkce *plus*

$$plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$plus(x, y) = x + y$$



Příklad 11.2 Striktně parciální funkce *div*

$$div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$div(x, y) = \text{celá část } x/y\text{, je-li } y \neq 0$$



Počáteční funkce

Hierarchie vyčíslitelných funkcí je založena na dostatečně elementárních tzv. *počátečních funkcích*, které tvoří „stavební kameny" vyšších funkcí.

- Jsou to tyto funkce:
  1. *Nulová funkce* (zero function): $\xi() = 0$
     zobrazuje „prázdnou n-tici" $\mapsto 0$
  2. *Funkce následníka* (successor function): $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
     $\sigma(x) = x + 1$
  3. *Projekce* (projection): $\pi^n_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$
     Vybírá z n-tice k-tou složku, např.: $\pi^3_2(7, 6, 4) = 6$ a $\pi^2_1(5, 17) = 5$

     Speciální případ: $\pi^n_0 : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^0$, tj. např. $\pi^3_0(1, 2, 3) = ()$

FIT.

Primitivně rekurzivní funkce

Nyní definujme tři způsoby vytváření nových, složitějších funkcí:

1. *Kombinace*:
   Kombinací dvou funkcí $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ získáme funkci, pro kterou:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \times g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^{m+n} \\ f \times g(\overline{x}) = (f(\overline{x}), g(\overline{x})),\ \overline{x} \in \mathbb{N}^k \end{array}}$$

   Např.: $\pi_1^3 \times \pi_3^3(4, 12, 8) = (4, 8)$

2. *Kompozice*:
   Kompozice dvou funkcí $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}^n$ je funkce, pro kterou:

$$\boxed{\begin{array}{l} g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n \\ g \circ f(\overline{x}) = g(f(\overline{x})),\ \overline{x} \in \mathbb{N}^k \end{array}}$$

   Např.:
   $\sigma \circ \xi() = 1$
   $\sigma \circ \sigma \circ \xi() = 2$

3. *Primitivní rekurze*:

Příklad 11.3 Předpokládejme, že chceme definovat funkci násobení $mult : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

$$mult(x, y) = \underbrace{x + \cdots + x}_{y}$$

Zřejmě:

(a) Pro $y = 0$ platí $x * 0 = 0$

(b) Pro $y > 0$ je výsledek $x + mult(x, y - 1)$

Takže funkci $mult$ můžeme definovat následujícím předpisem:
$mult(x, 0) = 0$
$mult(x, y + 1) = x + mult(x, y)$

Primitivní rekurze je technika, která umožňuje vytvořit funkci $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}^m$ na základě jiných dvou funkcí $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^m$ a $h : \mathbb{N}^{k+m+1} \to \mathbb{N}^m$ rovnicemi:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\overline{x}, 0) = g(\overline{x}) \\ f(\overline{x}, y+1) = h(\overline{x}, y, f(\overline{x}, y)), \overline{x} \in \mathbb{N}^k \end{array}}$$

Ilustrace schématu vyčíslení (pro $y = 3$):

$$f(\overline{x},3)=h(\overline{x},2,f(\overline{x},2))$$

$$f(\overline{x},2)=h(\overline{x},1,f(\overline{x},1))$$

$$f(\overline{x},1)=h(\overline{x},0,f(\overline{x},0))$$

$$f(\overline{x},0)=g(\overline{x})$$

Příklad 11.4 Uvažujme funkci $plus : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Může být definována pomocí primitivní rekurze takto:

$$plus(x,0) = \pi_1^1(x)$$
$$plus(x,y+1) = \sigma \circ \pi_3^3(x,y,plus(x,y))$$

což vyjadřuje:

1. $x + 0 = x$
2. $x + (y+1) = (x+y) + 1 = \sigma(x+y)$

Definice 11.1 *Třída primitivních rekurzivních funkcí* obsahuje všechny funkce, které mohou být z počátečních funkcí vytvořeny:

(a) kombinací

(b) kompozicí

(c) primitivní rekurzí

Věta 11.1 Každá primitivní rekurzivní funkce je totální funkcí.

Důkaz. Počáteční funkce jsou totální. Aplikací kombinace, kompozice a primitivní rekurze na totální funkce dostaneme totální funkce. $\square$

Příklady primitivně rekurzivních funkcí

Třída primitivně rekurzivních funkcí zahrnuje většinu funkcí typických v aplikacích počítačů.

❖ Konvence: Namísto funkcionálních zápisů typu $h \equiv plus \circ (\pi_1^3 \times \pi_3^3)$ budeme někdy používat zápis $h(x, y, z) = plus(x, z)$ nebo $h(x, y, z) = x + z$

❖ *Konstantní funkce*: Zavedeme funkci κ_m^n, která libovolné n-tici $\overline{x} \in \mathbb{N}^n$ přiřadí konstantní hodnotu $m \in \mathbb{N}$

$$\kappa_m^0 \equiv \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \ldots \circ \sigma}_{m-\text{krát}} \circ \xi$$

Pro pro $n > 0$ je κ_m^n definována následovně:

$$\kappa_m^n = \kappa_m^0 \circ \pi_0^n$$

Např.: $\kappa_3^2(1, 1) = \pi_3^3(1, 0, \kappa_3^2(1, 0)) = \kappa_3^2(1, 0) = \kappa_3^1(1) = \kappa_3^1(0) = \kappa_3^0() = 3$
Kombinací funkcí κ_m^n dostáváme konstanty z $\mathbb{N}^n$, $n > 1$
Např.: $\kappa_2^3 \times \kappa_5^3(x, y, z) = (2, 5)$

- *Funkce násobení*:
$$mult(x, 0) = \kappa_0^1(x)$$
$$mult(x, y + 1) = plus(x, mult(x, y))$$

- *Funkce umocňování*: $\exp : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ - analogicky - viz. cvičení

- *Funkce předchůdce*:
$$pred(0) = \xi()$$
$$pred(y + 1) = \pi_1^2(y, pred(y))$$

Poznámka: $pred$ je totální funkcí: $pred(0) = 0$

- *Funkce monus*:
$$monus(x, 0) = \pi_1^1(x)$$
$$monus(x, y + 1) = pred(monus(x, y))$$

Význam: $monus(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{je-li } x \geq y \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Notace: $monus(x, y) \equiv x \dot{-} y$

❖ *Funkce eq* (equal): $eq(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x = y \\ 0 & \text{je-li } x \neq y \end{cases}$

Definice 11.2 $eq(x,y) = 1 \dot{-} ((y \dot{-} x) + (x \dot{-} y))$ nebo formálněji
$eq \equiv monus \circ (\kappa_1^2 \times (plus \circ ((monus \circ (\pi_2^2 \times \pi_1^2)) \times monus \circ (\pi_1^2 \times \pi_2^2))))$

Příklad 11.5 $eq(5,3) = 1 \dot{-} ((3 \dot{-} 5) + (5 \dot{-} 3)) = 1 \dot{-} (0+2) = 1 \dot{-} 2 = 0$

❖ *Funkce* $\neg$ *eq*: $\neg eq \equiv monus \circ (\kappa_1^2 \times eq) \qquad (\equiv 1 \dot{-} eq)$

FIT.

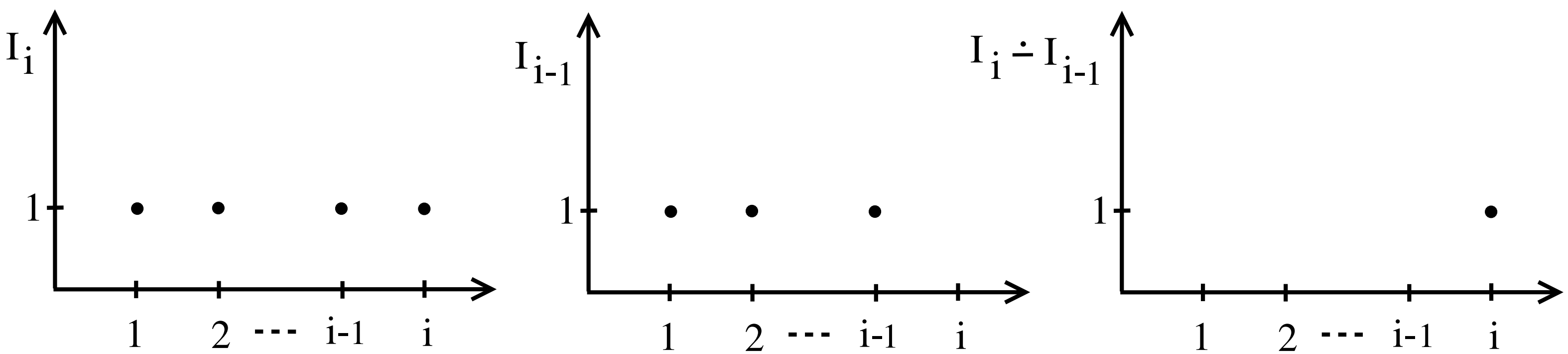
❖ *Tabulární funkce*:

Uvažujme funkce typu: $$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{je-li } x = 0 \\ 5 & \text{je-li } x = 4 \\ 2 & \text{v ostatních případech} \end{cases}$$

které bývají zadávány tabulkou. Tyto funkce lze tvořit pomocí charakteristické funkce

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x = i \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

která může být vyjádřena jako $monus(I_i, I_{i-1})$, kde $I_i(x) = eq(x \dot{-} i, 0)$



Tabulární funkce mohou být nyní tvořeny konečným součtem násobků konstant a funkcí φ_i a $\neg\varphi_i$.

Např.: nahoře uvedená funkce $f(x)$ je vyjádřitelná ve tvaru:

$$f \equiv mult(3, \varphi_0) + mult(5, \varphi_4) + mult(2, mult(\neg\varphi_0, \neg\varphi_4))$$

❖ *Funkce quo* (quotient): $quo(x,y) = \begin{cases} \text{celá část podílu } x/y \text{ je-li } y \neq 0 \\ 0 \text{ je-li } y = 0 \end{cases}$

Tato funkce může být definována primitivní rekurzí:

$$quo(0,y) = 0$$
$$quo(x+1,y) = quo(x,y) + eq(x+1, mult(quo(x,y),y) + y)$$

Funkce mimo primitivně rekurzivní funkce

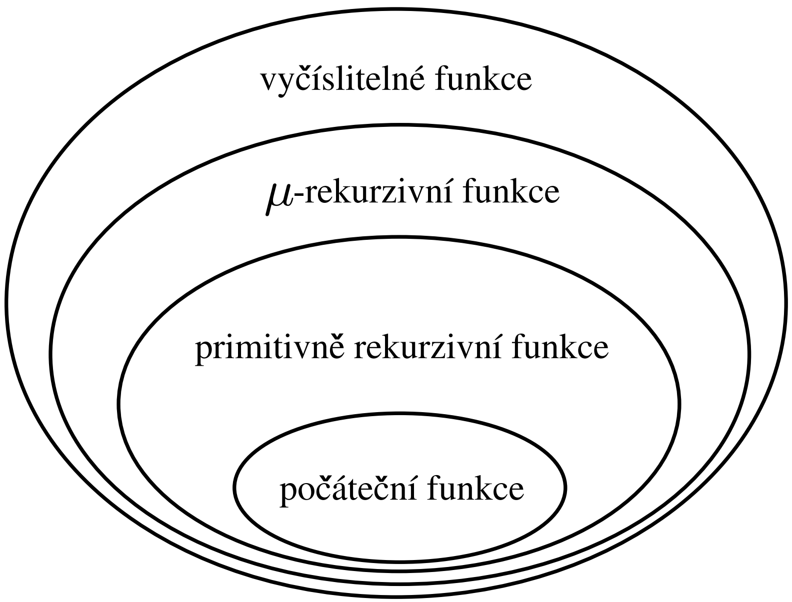
Existují funkce, které jsou vyčíslitelné a nejsou primitivně rekurzivními funkcemi. Jsou to všechny striktně parciální funkce (jako div), ale i totální funkce. Taková totální funkce byla prezentována W. Ackermannem (1928) a nazývá se *Ackermannova funkce*. Je dána rovnicemi:

$$\boxed{\begin{aligned} &A(0,y) = y+1 \\ &A(x+1,0) = A(x,1) \\ &A(x+1,y+1) = A(x,A(x+1,y)) \end{aligned}}$$

Věta 11.2 Existuje totální funkce z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, která není primitivně rekurzivní.

Důkaz.
Definice funkcí, které jsou primitivně rekurzivní budeme chápat jako řetězce a můžeme je uspořádat v lexikografickém pořadí s označením $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$
Definujeme nyní funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak, že $f(n) = f_n(n) + 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. f je jasně totální a vyčíslitelná. f však není primitivně rekurzivní (kdyby byla, pak $f \equiv f_m$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$. Pak ale $f(m) = f_m(m)$ a ne $f_m(m) + 1$, jak vyžaduje definice funkce f).
. $\square$

Definice 11.3 Třída totálních vyčíslitelných funkcí se nazývá *μ-rekurzivní funkce*.



Parciálně rekurzivní funkce

K rozšíření třídy vyčíslitelných funkcí za totální vyčíslitelné funkce zavedeme techniku známou pod názvem *minimalizace*. Tato technika umožňuje vytvořit funkci $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ z jiné funkce $g : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ předpisem, v němž $f(\overline{x})$ je nejmenší y takové, že:

1. $g(\overline{x}, y) = 0$
2. $g(\overline{x}, z)$ je definována pro $\forall z < y$, $z \in \mathbb{N}$

Tuto konstrukci zapisujeme notací:

$$\boxed{f(\overline{x}) = \mu y[g(\overline{x}, y) = 0]}$$

Příklad 11.6 $f(x) = \mu y[plus(x, y) = 0]$ tj. $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x = 0 \\ \text{nedef. jinak} \end{cases}$

Příklad 11.7 $div(x, y) = \mu t[((x + 1) \dot{-} (mult(t, y) + y)) = 0]$

Příklad 11.8 $i(x) = \mu y[monus(x, y) = 0]$ tj. identická funkce

❖ Funkce definovaná minimalizací je skutečně vyčíslitelná. Výpočet hodnoty $f(\overline{x})$ zahrnuje výpočet $g(\overline{x}, 0), g(\overline{x}, 1), \ldots$ tak dlouho, pokud nedostaneme:

(a) $g(\overline{x}, y) = 0$ ($f(\overline{x}) = y$)

(b) $g(\overline{x}, z)$ je nedefinována ($f(\overline{x})$ je nedefinována)

Definice 11.4 *Třída parciálně rekurzivních funkcí* je třída parciálních funkcí, které mohou být vytvořeny z počátečních funkcí aplikací:

(a) kombinace

(b) kompozice

(c) primitivní rekurze

(d) minimalizace

Vztah vyčíslitelných funkcí a Turingových strojů

Turingovsky vyčíslitelné funkce

Definice 11.5 Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$ *vyčísluje (počítá)* parciální funkci $f : \Sigma^{*m} \rightarrow \Sigma_1^{*n}$, $\Sigma_1 \subseteq \Gamma, \Delta \notin \Sigma_1$, jestliže pro každé $(w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \Sigma^{*m}$ a odpovídající počáteční konfiguraci $\underline{\Delta} w_1 \Delta w_2 \Delta \ldots \Delta w_m \Delta^\omega$ stroj M:

1. v případě, že $f(w_1, \ldots, w_m)$ je definována, pak M zastaví a páska obsahuje $\underline{\Delta} v_1 \Delta v_2 \Delta \ldots \Delta v_n \Delta\Delta\Delta$, kde $(v_1, v_2, \ldots, v_n) = f(w_1, \ldots, w_m)$
2. v případě, že $f(w_1, \ldots, w_m)$ není definována, M cykluje (nikdy nezastaví) nebo zastaví abnormálně.

Parciální funkce, kterou může počítat nějaký Turingův stroj se nazývá funkcí *Turingovsky vyčíslitelnou*.

Příklad 11.9
Funkci $f(w) = w^R$ je Turingovsky vyčíslitelná.

Příklad 11.10

Nechť L je libovolný jazyk.

Funkce $f(w) = \begin{cases} |w| & \text{jestliže } w \in L \\ 0 & \text{jestliže } w \notin L \end{cases}$ není Turingovsky vyčíslitelná.

Poznámka 11.1 Definice výpočtu funkce Turingovým strojem nepředpokládala speciální pozici hlavy v koncové konfiguraci. Můžeme předpokládat, že M končí v konfiguraci $\underline{\Delta} v_1 \Delta \ldots \Delta v_n \Delta\Delta\Delta$ bez újmy na obecnosti.

Turingovská vyčíslitelnost a parciálně rekurzivní funkce

Věta 11.3 Každá parciálně rekurzivní funkce je Turingovsky vyčíslitelná.

Věta 11.4 Každý výpočetní proces prováděný Turingovým strojem je procesem vyčíslení nějaké parciálně rekurzivní funkce.

Důkazy ve studijním textu.

Shrňme v obrázku získané informace: