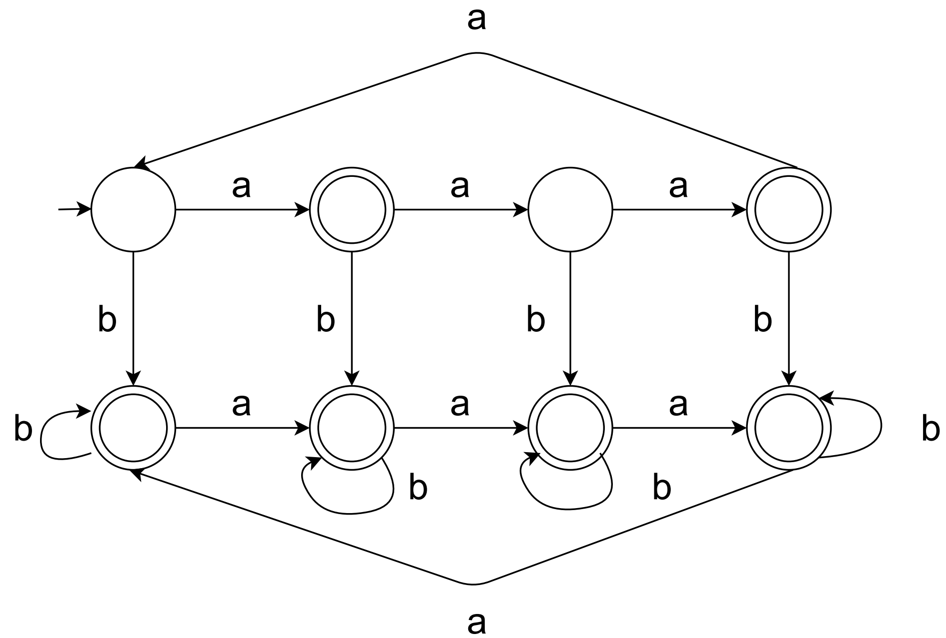
Minimalizace Konečných Automatů

Motivační příklad

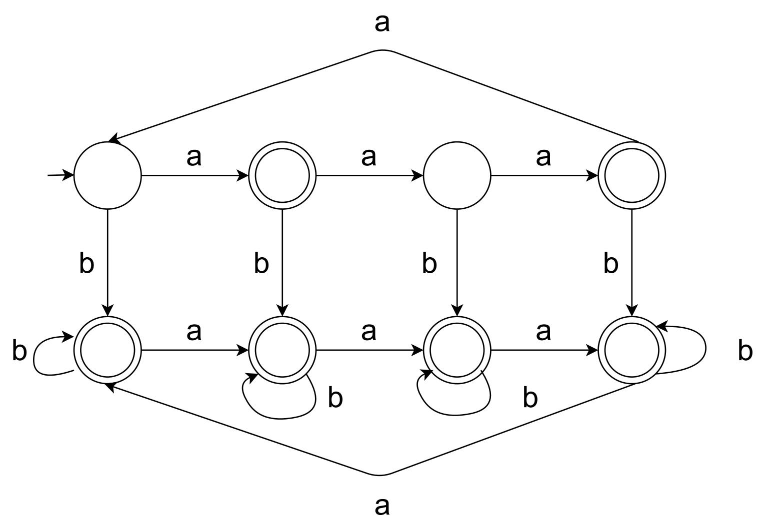
- Uvažme jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \texttt{ mod } 2 = 1 \vee \#_b(w) > 0\}$



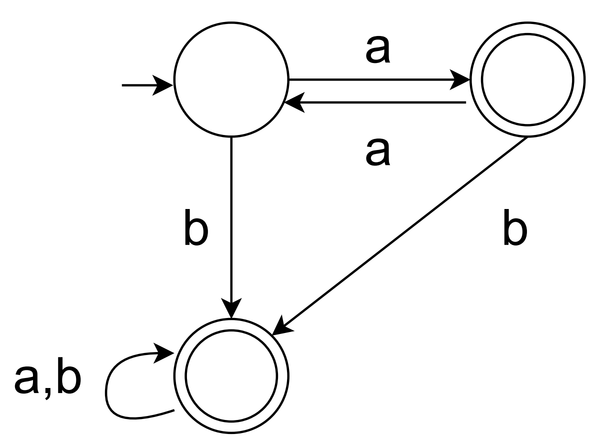
- Existuje menší automat akceptující jazyk L?

Motivační příklad

- Uvažme jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \texttt{ mod } 2 = 1 \vee \#_b(w) > 0\}$



- Existuje menší automat akceptující jazyk L?



Eliminace nedosažitelných stavů

Definice 2.1 Nechť $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat. Stav $q \in Q$ nazveme dosažitelný, pokud existuje $w \in \Sigma^*$ takové, že $(q_0, w) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q, \varepsilon)$. Stav je nedosažitelný, pokud není dosažitelný.

Algoritmus 2.1 Eliminace nedosažitelných stavů
Vstup: DKA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Výstup: DKA M' bez nedosažitelných stavů, $L(M) = L(M')$.
Metoda:

1. i := 0
2. S_i := $\{q_0\}$
3. `repeat`
4. $\quad S_{i+1}$:= $S_i \cup \{q \mid \exists p \in S_i \; \exists a \in \Sigma : \delta(p, a) = q\}$
5. $\quad i$:= i + 1
6. `until` $S_i = S_{i-1}$
7. M' := $(S_i, \Sigma, \delta_{|S_i}, q_0, F \cap S_i)$

Jazykově nerozlišitelné stavy

Definice 2.2

- Nechť $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je úplně definovaný DKA. Říkáme, že řetězec $w \in \Sigma^*$ rozlišuje q_1, q_2, jestliže $(q_1, w) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_3, \varepsilon) \wedge (q_2, w) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_4, \varepsilon)$ pro nějaké q_3, q_4 a *právě jeden* ze stavů q_3, q_4 je v F.
- Říkáme, že stavy $q_1, q_2 \in Q$ jsou k-nerozlišitelné a píšeme $q_1 \overset{k}{\equiv} q_2$, právě když neexistuje $w \in \Sigma^*$, $|w| \leq k$, který rozlišuje q_1 a q_2.
- Stavy q_1, q_2 jsou nerozlišitelné, značíme $q_1 \equiv q_2$, jsou-li pro každé $k \geq 0$ k-nerozlišitelné.

❖ Poznámka: Dá se snadno dokázat, že $\equiv$ je relací ekvivalence na Q, tj. relací, která je reflexivní, symetrickou a tranzitivní.

Definice 2.3 Úplně definovaný DKA M nazýváme redukovaný, jestliže žádný stav z Q není nedostupný a žádné dva stavy nerozlišitelné.

Věta 2.1 Nechť $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je úplně definovaný DKA a $|Q| = n$, $n \geq 2$. Platí $\forall q_1, q_2 \in Q : q_1 \equiv q_2 \Leftrightarrow q_1 \overset{n-2}{\equiv} q_2$.

Důkaz. „$\Rightarrow$“ triviální, ukážeme „$\Leftarrow$“:

1. Jestliže $|F| = 0$ nebo $|F| = n$, pak platí $q_1 \overset{n-2}{\equiv} q_2 \quad \Rightarrow \quad q_1 \equiv q_2$.
2. Nechť $|F| > 0 \wedge |F| < n$. Ukážeme, že platí $\equiv \; = \; \overset{n-2}{\equiv} \subseteq \overset{n-3}{\equiv} \subseteq \ldots \subseteq \overset{1}{\equiv} \subseteq \overset{0}{\equiv}$:
   - Zřejmě platí:
     (a) $\forall q_1, q_2 \in Q : q_1 \overset{0}{\equiv} q_2 \Leftrightarrow (q_1 \in F \wedge q_2 \in F) \vee (q_1 \notin F \wedge q_2 \notin F)$, tj.
     $q_1 \overset{0}{\equiv} q_2 \Leftrightarrow (q_1 \in F \Leftrightarrow q_2 \in F)$.
     (b) $\forall q_1, q_2 \in Q \; \forall k \geq 1 : q_1 \overset{k}{\equiv} q_2 \Leftrightarrow (q_1 \overset{k-1}{\equiv} q_2 \wedge \forall a \in \Sigma : \delta(q_1, a) \overset{k-1}{\equiv} \delta(q_2, a))$.
   - Relace $\overset{0}{\equiv}$ je ekvivalencí určující rozklad $\{F, Q \setminus F\}$.
   - Je-li $\overset{k+1}{\equiv} \neq \overset{k}{\equiv}$, pak $\overset{k+1}{\equiv}$ je vlastním zjemněním $\overset{k}{\equiv}$, tj. obsahuje alespoň o jednu třídu více než rozklad $\overset{k}{\equiv}$.
   - Jestliže pro nějaké k platí $\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$, pak také $\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k+2}{\equiv} = \overset{k+3}{\equiv} = \ldots$ podle (b) a tedy $\overset{k}{\equiv}$ je hledaná ekvivalence.
   - Protože F nebo $Q \setminus F$ obsahuje nejvýše $n - 1$ prvků, získáme relaci $\equiv$ po nejvýše $n - 2$ zjemněních $\overset{0}{\equiv}$.

$\square$

Převod na redukovaný DKA

Algoritmus 2.2 Převod na redukovaný DKA

Vstup: Úplně definovaný DKA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Výstup: Redukovaný DKA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$, $L(M) = L(M')$.

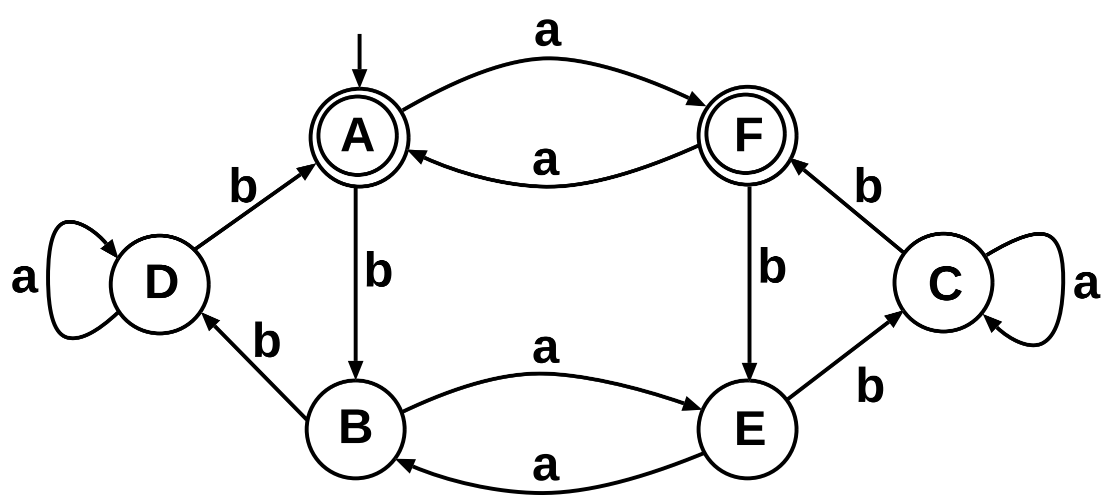
Metoda:

1. Odstraň nedostupné stavy s využitím alg. 2.1.
2. i := 0
3. $\overset{0}{\equiv}$:= $\{(p, q) \mid p \in F \Longleftrightarrow q \in F\}$
4. `repeat`
5. $\quad \overset{i+1}{\equiv}$:= $\{(p, q) \mid p \overset{i}{\equiv} q \wedge \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \overset{i}{\equiv} \delta(q, a)\}$
6. $\quad i$:= i + 1
7. `until` $\overset{i}{\equiv} = \overset{i-1}{\equiv}$
8. Q' := $Q / \overset{i}{\equiv}$
9. $\forall p, q \in Q \; \forall a \in \Sigma : \delta'([p], a) = [q] \Leftrightarrow \delta(p, a) = q$
10. $q_0' = [q_0]$
11. $F' = \{[q] \mid q \in F\}$

❖ *Poznámka:* Výraz $[x]$ značí ekvivalenční třídu určenou prvkem x.

Příklad minimalizace DKA

Příklad 2.1 Převeďte níže uvedený DKA (zadaný diagram přechodů) na odpovídající redukovaný DKA.



1. Neobsahuje nedostupné stavy.

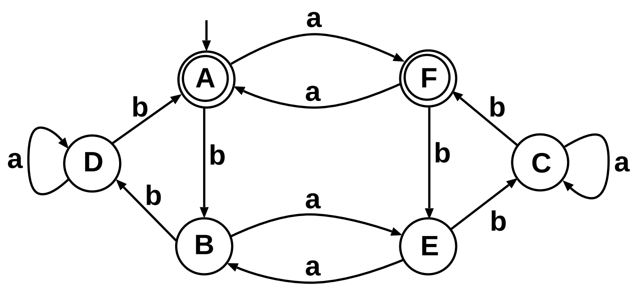
3. $\overset{0}{\equiv} = \{\{A, F\}, \{B, C, D, E\}\}$

5.1. $\overset{1}{\equiv} = \{\{A, F\}, \{B, E\}, \{C, D\}\}$

$\overset{0}{\equiv}$	δ	a	b
I:	A	F_I	B_{II}
	F	A_I	E_{II}
II:	B	E_{II}	D_{II}
	C	C_{II}	F_I
	D	D_{II}	A_I
	E	B_{II}	C_{II}

Pokračuje na druhé straně...

Pro zopakování automat z předchozího slajdu, v jehož minimalizaci níže pokračujeme:

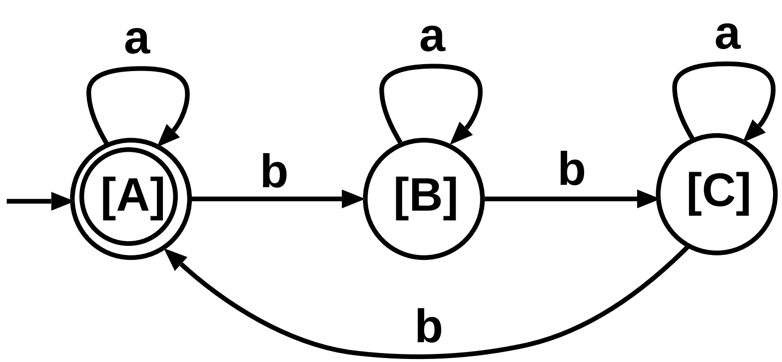


$\overset{1}{\equiv}$	δ	a	b
I:	A	F_I	B_{II}
	F	A_I	E_{II}
II:	B	E_{II}	D_{III}
	E	B_{II}	C_{III}
III:	C	C_{III}	F_I
	D	D_{III}	A_I

5.2. $\overset{2}{\equiv} = \{\{A,F\},\{B,E\},\{C,D\}\} = \overset{1}{\equiv} = \equiv$

8. $Q' = \{[A],[B],[C]\}$, kde $[A] = \{A,F\}$, $[B] = \{B,E\}$, $[C] = \{C,D\}$

Výsledný automat:



Strukturální vlastnosti regulárních jazyků

Konečné jazyky

Věta 2.2 Každý konečný jazyk je regulární.

Důkaz. Nechť $L = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\},\ w_i \in \Sigma$.

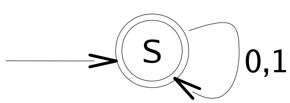
Pak $L = L(G)$, kde $G = (\{S\}, \Sigma, \{S \to w_1, S \to w_2, \ldots, S \to w_n\}, S)$. G je zřejmě gramatika typu 3.

$\square$

Opak věty 3.1 zjevně neplatí:

Příklad 2.2 Sestrojte gramatiku typu 3 generující jazyk $\{0, 1\}^*$.

Řešení:



$\Rightarrow \quad G = (\{S\},\ \{0, 1\},\ \{S \to \varepsilon, S \to 0S, S \to 1S\},\ S)$

Pumping lemma

Věta 2.3 Nechť L je regulární jazyk. Pak existuje celočíselná konstanta $p > 0$ taková, že platí:

$$\begin{aligned} w \in L \;\wedge\; |w| \geq p \quad \Rightarrow \quad & w = xyz \;\wedge \\ & y \neq \varepsilon \;\wedge |xy| \leq p \;\wedge \\ & xy^iz \in L \text{ pro } i \geq 0. \end{aligned}$$

❖ Ekvivalentní formulace Pumping lemmatu (použití explicitní alternace kvantifikátorů) :

$$\begin{aligned} L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \quad & \exists p > 0 : \\ & \forall w \in \Sigma^* : w \in L \wedge \; |w| \geq p \Rightarrow \\ & (\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge \; y \neq \epsilon \;\wedge\; |xy| \leq p \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L) \end{aligned}$$

❖ Poznámka: Neformálně řečeno Pumping lemma tvrdí, že v každé dostatečně dlouhé větě každého regulárního jazyka jsme schopni poblíž jejího začátku najít poměrně krátkou sekvenci, kterou je možné vypustit, resp. zopakovat libovolný počet krát, přičemž zůstáváme stále v rámci daného jazyka.

Důkaz. Pumping lemmatu

Nechť $L = L(M)$, $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je konečný automat, kde $|Q| = n > 0$. Položme $p = n$. Je-li $w \in L$ a $|w| \geq n$, pak M přijme větu w „průchodem" alespoň $n + 1$ konfiguracemi a tudíž alespoň dvě z nich obsahují stejný stav, tedy:

$$(q_0, w) = (q_0, xyz) \overset{*}{\vdash} (r, yz) \overset{k}{\vdash} (r, z) \overset{*}{\vdash} (q_F, \varepsilon),\ q_F \in F$$

pro nějaký stav $r \in Q$ a k takové, že $0 < k \leq n$. Dále je zřejmé, že k „zopakování" stavu r dojde nejpozději po přečtení prvních n znaků vstupního řetězce a tudíž $|xy| \leq p$.

Pak ale existuje posloupnost konfigurací:

$$\begin{array}{ll} (q_0, xy^iz) & \overset{*}{\vdash} (r, y^iz) \\ & \overset{+}{\vdash} (r, y^{i-1}z) \\ & \vdots \\ & \overset{+}{\vdash} (r, z) \\ & \overset{*}{\vdash} (q_F, \varepsilon) \end{array}$$

z které plyne $xy^iz \in L(M)$, a to nejen pro $i > 0$, ale i pro případ $i = 0$:

$$(q_0, xz) \overset{*}{\vdash} (r, z) \overset{*}{\vdash} (q_F, \varepsilon),\ q_F \in F$$

$\square$

Význam Pumping lemmatu

❖ Jak můžeme dokázat, že daný problém je/není řešitelný pomocí uvažovaných výpočetních prostředků (např. jestli pro daný jazyk existuje KA)?

- ukázat existenci řešení je jednoduché: poskytneme řešení (např. KA)
- ukázat neexistenci je principiálně náročnější: nemůžeme vyzkoušet všechny možná řešení (všech KA je nekonečně mnoho)

❖ Pumping lemma nám dovoluje dokazovat neexistenci řešení (tj. neexistenci KA pro daný jazyk)

❖ V rámci TIN si ukážeme i další techniky (diagonalizace, redukce), které lze použít i pro jiné výpočetní třídy

Použití Pumping lemmatu

$(L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow L \notin \mathcal{L}_3)$ Obměna implikace

$$\begin{array}{rl} A \equiv & \exists p > 0 : \\ & \forall w \in \Sigma^* : w \in L \wedge \ |w| \geq p \Rightarrow \\ & (\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge \ y \neq \epsilon \ \wedge \ |xy| \leq p \wedge \forall i \geq 0 : xy^i z \in L) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \neg A \equiv & \forall p > 0 : \\ & \exists w \in \Sigma^* : w \in L \wedge \ |w| \geq p \wedge \\ & (\forall x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge \ y \neq \epsilon \ \wedge \ |xy| \leq p \Rightarrow \exists i \geq 0 : xy^i z \notin L) \end{array}$$

- K důkazu, že jazyk L není regulární stačí dokázat tvrzení $\neg A$.

Příklad 2.3 Dokažte, že jazyk $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ není regulární.

Důkaz:

- Pro libovolné $p > 0$ zvolíme slovo $w = 0^p 1^p$ ($w \in L \wedge |w| \geq p$).

- Dále uvažme všechny rozdělení $w = xyz$, kde $y \neq \varepsilon \ \wedge |xy| \leq p$. Je zřejmé, že $y \in \{0\}^+$.

$$0\,\underbrace{0\,0\,\ldots}_{y}\,.\,0\,1\,1\,1\ldots 1$$

- Pak ale pro libovolné $y \in \{0\}^+$ (libovolné rozdělení), $\exists i \geq 0$, pro které $xy^i z \notin L$ — nesouhlasí počet 0 a 1 (zde to platí pro všechna $i \neq 1$).

- Ukázali jsme, že pro L platí tvrzení $\neg A$ (viz. předchozí slajd) a tudíž $L \notin \mathcal{L}_3$.

$\square$

Příklad 2.4 Dokažte, že jazyk $L = \{a^q \mid q \text{ je prvočíslo } \}$ není regulární.

Důkaz:

- Pro libovolné $p > 0$ zvolíme slovo $w = a^r$, kde r prvočíslo větší než p.

- Dále uvažme všechny rozdělení $w = xyz$, kde $y \neq \varepsilon \ \wedge |xy| \leq p$. Je zřejmé, že $y = a^k$, kde $0 < k \leq p$.

- Pak ale pro libovolné k (libovolné rozdělení), zvolme $i = r + 1$. Dostáváme, že $|xy^iz| = |xy^{r+1}z| = |xyz| + |y^r| = r + r.k = r.(k + 1)$, což však není prvočíslo (pro žádné k), a tedy $xy^{r+1}z \notin L$

- Ukázali jsme, že pro L platí tvrzení A a tudíž $L \notin \mathcal{L}_3$.

$\square$

Myhill-Nerodova věta

Motivace

- Myhill-Nerodova věta
  - charakterizuje některé zásadní vztahy mezi konečnými automaty nad abecedou Σ a jistými ekvivalenčními relacemi nad řetězci ze Σ^*,
  - popisuje některé z nutných a postačujících podmínek pro to, aby daný jazyk byl jazykem regulárním (používá se často k důkazu neregularity jazyka),
  - poskytuje formální bázi pro elegantní důkaz existence unikátního (až na isomorfismus) minimálního DKA k danému regulárnímu jazyku.

Pravá kongruence a prefixová ekvivalence

❖ Zopakování: ekvivalence $\sim$ je binární relace, která je *reflexivní, symetrická a tranzitivní*. Index ekvivalence $\sim$ je počet tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$. Je-li těchto tříd nekonečně mnoho, definujeme index jako ∞.

Definice 2.4 Nechť Σ je abeceda a $\sim$ je ekvivalence na Σ^*. Ekvivalence $\sim$ je pravou kongruencí (je zprava invariantní), pokud pro každé $u, v, w \in \Sigma^*$ platí

$$u \sim v \Longrightarrow uw \sim vw$$

Věta 2.4 Ekvivalence $\sim$ na Σ^* je pravá kongruence právě tehdy, když pro každé $u, v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$ platí $u \sim v \Longrightarrow ua \sim va$.

Důkaz. „$\Rightarrow$“ je triviální, „$\Leftarrow$“ lze snadno ukázat indukcí nad délkou w. $\square$

Definice 2.5 Nechť L je libovolný (ne nutně regulární) jazyk nad abecedou Σ. Na množině Σ^* definujeme relaci $\sim_L$ zvanou prefixová ekvivalence pro L takto:

$$u \sim_L v \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \Longleftrightarrow vw \in L$$

Myhill-Nerodova věta

Věta 2.5 Nechť L je jazyk nad Σ. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. L je jazyk přijímaný deterministickým konečným automatem.
2. L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného pravou kongruencí na Σ^* s konečným indexem.
3. Relace $\sim_L$ má konečný index.

Důkaz. Dokážeme následující implikace:

- **1** $\Rightarrow$ **2**
- **2** $\Rightarrow$ **3**
- **3** $\Rightarrow$ **1**

Z definice ekvivalence $(a \Leftrightarrow b \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} a \Rightarrow b \ \wedge \ b \Rightarrow a)$ a ze základní tautologie výrokové logiky $(a \Rightarrow b \ \wedge \ b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ plyne tvrzení věty.

□

Důkaz implikace 1 $\Rightarrow$ 2

❖ Je-li L přijímán DKA, pak L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného pravou kongruencí na Σ^* s konečným indexem.

❖ Pro DKA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ zaveďme zobecněnou přechodovou funkci $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ tak, že $\forall q_1, q_2 \in Q, w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_1, w) = q_2 \Leftrightarrow (q_1, w) \overset{*}{\underset{M}{\vdash}} (q_2, \varepsilon)$.

Důkaz. Pro daný L přijímaný konečným automatem M zkonstruujeme $\sim$ s potřebnými vlastnostmi:

- Nechť $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a δ je totální.
- Zvolíme $\sim$ jako binární relaci na Σ^* takovou, že $u \sim v \iff \hat{\delta}(q_0, u) = \hat{\delta}(q_0, v)$.
- Ukážeme, že $\sim$ má potřebné vlastnosti:
  - $\sim$ je *ekvivalence*: je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
  - $\sim$ má *konečný index*: třídy rozkladu odpovídají stavům automatu.
  - $\sim$ je *pravá kongruence*: Nechť $u \sim v$ a $a \in \Sigma$. Pak $\hat{\delta}(q_0, ua) = \delta(\hat{\delta}(q_0, u), a) = \delta(\hat{\delta}(q_0, v), a) = \hat{\delta}(q_0, va)$ a tedy $ua \sim va$.
  - L je *sjednocením některých tříd* $\Sigma^* \setminus \sim$: těch, které odpovídají F.

$\square$

Důkaz implikace 2 $\Rightarrow$ 3

❖ Existuje-li relace $\sim$ splňující podmínku 2, pak $\sim_L$ má konečný index.

Důkaz.

- Pro všechny $u, v \in \Sigma^*$ takové, že $u \sim v$, platí $u \sim_L v$:
  - Nechť $u \sim v$. Ukážeme, že také $u \sim_L v$, tj. $\forall w \in \Sigma^* : uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$.
  - Víme, že $uw \sim vw$ a protože L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^* \backslash \sim$, platí též $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$.
- Víme tedy, že $\sim \subseteq \sim_L$ (tj. $\sim_L$ je největší pravá kongruence s danými vlastnostmi).
- Každá třída $\sim$ je obsažena v nějaké třídě $\sim_L$.
- Index $\sim_L$ nemůže být větší než index $\sim$.
- $\sim$ má konečný index a tedy i $\sim_L$ má konečný index.

$\square$

Důkaz implikace 3 $\Rightarrow$ 1

❖ Má-li $\sim_L$ konečný index, pak L je přijímán nějakým konečným automatem.

Důkaz. Zkonstruujeme $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ přijímající L:

- $Q = \Sigma^* \backslash \sim_L$ (stavy jsou třídy rozkladu Σ^* relací $\sim_L$),
- $\forall u \in \Sigma^*, a \in \Sigma : \delta([u], a) = [ua]$,
- $q_0 = [\varepsilon]$,
- $F = \{[x] \mid x \in L\}$.

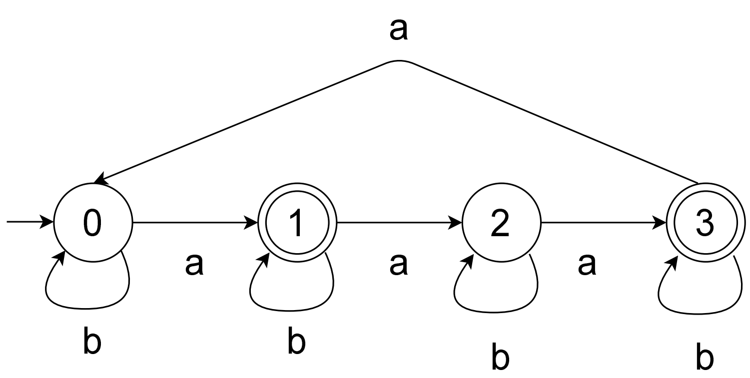
Uvedená konstrukce *je korektní*, tj. $L = L(M)$:

- Indukcí nad délkou slova v ukážeme, že $\forall v \in \Sigma^* : \hat{\delta}([\varepsilon], v) = [v]$.
- $v \in L \Longleftrightarrow [v] \in F \Longleftrightarrow \hat{\delta}([\varepsilon], v) \in F$.

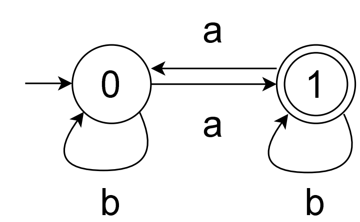
$\square$

Příklad: Interpretace M.-N. věty

❖ Uvažme jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \mod 2 = 1\}$.



DKA A_1



DKA A_2

Pravá kongruence $\sim_1$ odpovídající DKA A_1:

$u \sim_1 v \iff \#_a(u) \equiv \#_a(v) (\mathtt{mod}\ 4)$

$\{a,b\}^* \backslash \sim_1 = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$

kde $[i]_4 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \mod 4 = i\}$

$L = [1]_4 \cup [3]_4$

$\sim_2$ odpovídající DKA A_2:

$u \sim_2 v \iff \#_a(u) \equiv \#_a(v) (\mathtt{mod}\ 2)$

$\{a,b\}^* \backslash \sim_2 = \{[0]_2, [1]_2\}$

$[i]_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \mod 2 = i\}$

$L = [1]_2$

$\sim_1 \subseteq \sim_2 = \sim_L$ (A_2 je minimální automat pro L)

Důkaz neregularity pomocí M.-N. věty

Příklad 2.5 Dokažte, že jazyk $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ není regulární.

Důkaz.

- Žádné řetězce $\varepsilon, a, a^2, a^3, \ldots$ nejsou $\sim_L$-ekvivalentní, protože $a^i b^i \in L$, ale $a^j b^i \notin L$ pro $i \neq j$.
- $\sim_L$ má tedy nekonečně mnoho tříd (neboli nekonečný index).
- Dle Myhill-Nerodovy věty tudíž nemůže být L přijímán žádným konečným automatem.

$\square$

Důkaz regularity pomocí M.-N. věty

Příklad 2.6 Dokažte, že jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid 2010 \leq \#_a(w) \leq 2020\}$ je regulární.

Důkaz.

- Uvažme relaci pravé kongruence $\sim$ definovanou následovně:

$$u \sim v \Leftrightarrow (\#_a(u) = \#_a(v)) \vee (\#_a(u) > 2020 \wedge \#_a(v) > 2020)$$

  - $\sim$ je *ekvivalence*: je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
  - $\sim$ je *pravá kongruence*: Nechť $u \sim v$, pak $ua \sim va$, jelikož $\#_a(ua) = \#_a(va) = \#_a(u) + 1$ nebo $\#_a(ua) > 2020 \wedge \#_a(va) > 2020$
    Rovněž $ub \sim vb$, jelikož $\#_a(ub) = \#_a(u) \wedge \#_a(v) = \#_a(vb)$.
- $\sim$ má konečný index (rozklad Σ^* má 2021 tříd).
- L je sjednocením tříd rozkladu $[x_i]$ pro $2010 \leq i \leq 2020$, kde

$$[x_i] = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = i\}$$

- Dle Myhill-Nerodovy věty je L přijímán konečným automatem.

$\square$

M.-N. věta a minimalita DKA

Věta 2.6 (2. varianta Myhill-Nerodovy věty) Počet stavů libovolného minimálního DKA přijímajícího L je roven indexu $\sim_L$. (Takový DKA existuje právě tehdy, když je index $\sim_L$ konečný.)

Důkaz.

- Každý DKA (můžeme uvažovat DKA bez nedosažitelných stavů) určuje jistou pravou kongruenci s konečným indexem a naopak.
- Je-li L regulární, je $\sim_L$ největší pravou kongruencí s konečným indexem takovou, že L je sjednocením některých tříd příslušného rozkladu.
- Konečný automat, který odpovídá $\sim_L$ (viz důkaz $3 \Rightarrow 1$ Myhill-Nerodovy věty), je tedy minimální konečný automat přijímající L.

$\square$

Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

Věta 2.7 Třída regulárních jazyků **je uzavřena** (mimo jiné) vzhledem k operacím:

$\cup$ (sjednocení),

$\cdot$ (konkatenace) a

* (iterace).

$\cap$ (průnik)

$co-$ (doplněk/komplement)

Důkaz. Uzavřenost na operace $\cup, \cdot$ a * plyne z definice regulárních množin a ekvivalence regulárních množin a regulárních jazyků.

Důkaz pokračuje dále.

Důkaz.

1. Dokážeme uzavřenost vzhledem ke komplementu nad abecedou Σ. K jazyku L sestrojíme *úplně definovaný* KA M.
$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$
takový, že $L = L(M)$. Pak KA M'
$$M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$$
zřejmě přijímá jazyk $co{-}L = \Sigma^* \setminus L$ (tj. komplement jazyk L).

2. Uzavřenost vzhledem k průniku plyne z de Morganových zákonů:
$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$
a tedy $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cap L2 \in \mathcal{L}_3$.

$\square$

❖ Alternativní důkazy uzávěrových vlastností (konstrukce příslušných gramatik a automatů) ukážeme na cvičení

Příklady na uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_3 \iff (L_1 \cup L_2) \in \mathcal{L}_3$
2. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow (L_1 \diamond L_2) \in \mathcal{L}_3$, kde
   $L_1 \diamond L_2 = \{uv \mid u, v \in L_1 \cup L_2\}$

Příklady na uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_3 \iff (L_1 \cup L_2) \in \mathcal{L}_3$
2. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow (L_1 \diamond L_2) \in \mathcal{L}_3$, kde $L_1 \diamond L_2 = \{uv \mid u, v \in L_1 \cup L_2\}$

Řešení 1: Tvrzení neplatí. Ukážeme, že neplatí implikace $\Leftarrow$. Zvolme $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ a $L_2 = \Sigma^*$. Pak $L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \in \mathcal{L}_3$, ale $L_1 \notin \mathcal{L}_3$. Opačná implikace platí přímo z uzávěrových vlastností regulárních jazyků.

Příklady na uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

1. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_3 \iff (L_1 \cup L_2) \in \mathcal{L}_3$
2. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow (L_1 \diamond L_2) \in \mathcal{L}_3$, kde $L_1 \diamond L_2 = \{uv \mid u, v \in L_1 \cup L_2\}$

Řešení 1: Tvrzení neplatí. Ukážeme, že neplatí implikace $\Leftarrow$. Zvolme $L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ a $L_2 = \Sigma^*$. Pak $L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \in \mathcal{L}_3$, ale $L_1 \notin \mathcal{L}_3$. Opačná implikace platí přímo z uzávěrových vlastností regulárních jazyků.

Řešení 2: Tvrzení platí. Uvědomme si, že $L_1 \diamond L_2 = (L_1 \cup L_2) \cdot (L_1 \cup L_2)$. Z uzavřenosti regulárních jazyků vzhledem k operacím $\cup$ a $\cdot$ tudíž dostáváme požadované tvrzení.

Rozhodnutelné problémy regulárních jazyků

Rozhodnutelné problémy v $\mathcal{L}_3$

Základní problémy:

- problém neprázdnosti: $L \neq \emptyset$?
- problém universality: $L = \Sigma^*$?
- problém náležitosti: $w \in L$?
- problém ekvivalence: $L(G_1) = L(G_2)$?

Věta 2.8 Ve třídě $\mathcal{L}_3$ je rozhodnutelný problémy **neprázdnosti** a **universality** jazyka i problém **náležitosti** řetězce (do jazyka).

Důkaz.
K jazyku $L \in \mathcal{L}_3$ sestrojíme úplně definovaný DKA M, $L = L(M)$:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

neprázdnost: $L(M) \neq \emptyset \iff \exists q \in Q : (q \in F \wedge q$ je dostupný z $q_0)$

universalita: $L(M) = \Sigma^* \iff \forall q \in Q : (q \in F \vee q$ není dostupný z $q_0)$

náležitost: $w \in L \iff (q_0, w) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon) \wedge q \in F$

$\square$

Věta 2.9 Nechť $L_1 = L(G_1)$ a $L_2 = L(G_2)$ jsou dva jazyky generované regulárními gramatikami G_1 a G_2. Pak je rozhodnutelný problém **ekvivalence**, tj. $L(G_1) = L(G_2)$.

Důkaz.
Nechť $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$, resp. $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$ jsou KA přijímající jazyky L_1, resp. L_2 takové, že $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Vytvoříme konečný automat M takto:

$$M = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta_1 \cup \delta_2, q_0^1, F_1 \cup F_2)$$

a vypočítáme relaci $\equiv$ nerozlišitelnosti stavů z $Q_1 \cup Q_2$ pro automat M.
Pak

$$L(G_1) = L(G_2) \iff q_0^1 \equiv q_0^2$$

$\square$