

IEL — Střídavý proud

Petr Peringer
peringer AT fit.vutbr.cz

Vysoké učení technické v Brně,
Fakulta informačních technologií,
Božetěchova 2,
61266 Brno

(Verze: 22. listopadu 2017)

Analýza lineárních obvodů se střídavým proudem (AC)

Střídavé napětí (ustálený stav):

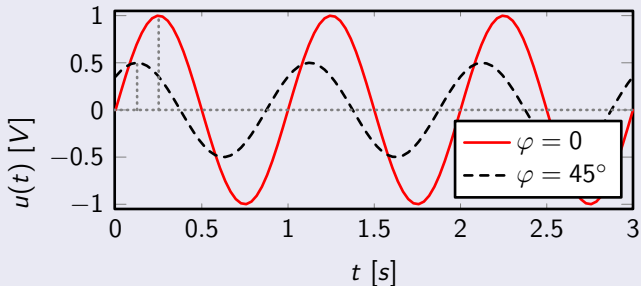
$$u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

A je amplituda [V]

ω je úhlová frekvence [rad/s] ($\omega = 2\pi f$)

φ je fázový posuv v [rad] nebo stupních [°] ($2\pi \text{ rad} = 360^\circ$)

Příklad pro $f = 1\text{Hz}$, různá amplituda a fáze



Základní pojmy

- Ustálený stav (*steady state*)
- Periodický signál s periodou T [s]:

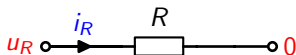
$$u(t + T) = u(t)$$

- Amplituda A [V] je maximální napětí (nebo proud)
- Frekvence f [Hz, s^{-1}]: $f = \frac{1}{T}$
- Úhlová frekvence $\omega = 2\pi f$ [rad/s]
- Fázový posuv φ [rad] nebo [°] ($2\pi \text{rad} = 360^\circ$)
- Efektivní hodnota napětí (*RMS*) $U_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

$$\text{Příklad: } U_{ef} = 230V \Rightarrow A = U_{ef}\sqrt{2} = 325V$$

Příklady: oscilátory, modulace (CW, AM, FM, QAM)

Rezistor — rovnice a příklad řešení



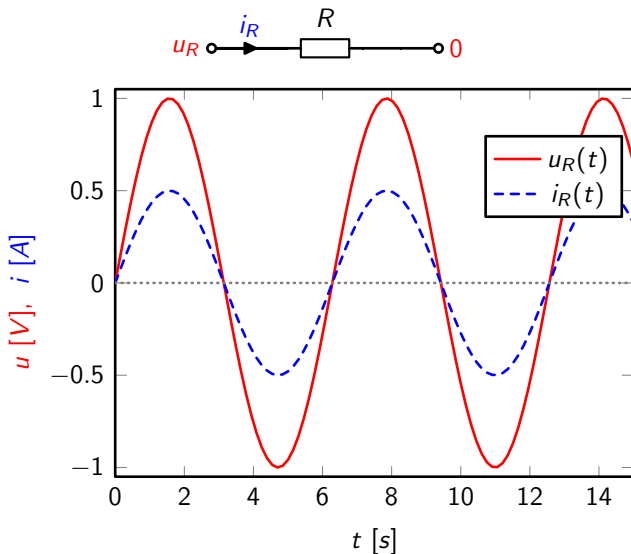
Rovnice (Ohmův zákon):

$$u_R(t) = R i_R(t)$$

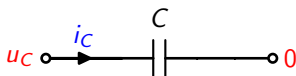
Řešení pro $u_R(t) = \sin(\omega t)$:

$$i_R(t) = \frac{1}{R} u_R(t) = \frac{1}{R} \sin(\omega t)$$

Napětí a proud na odporu jsou ve fázi.

Rezistor — napětí a proud pro $R = 2\Omega$, $\omega = 1$ 

Kondenzátor — rovnice a příklad řešení



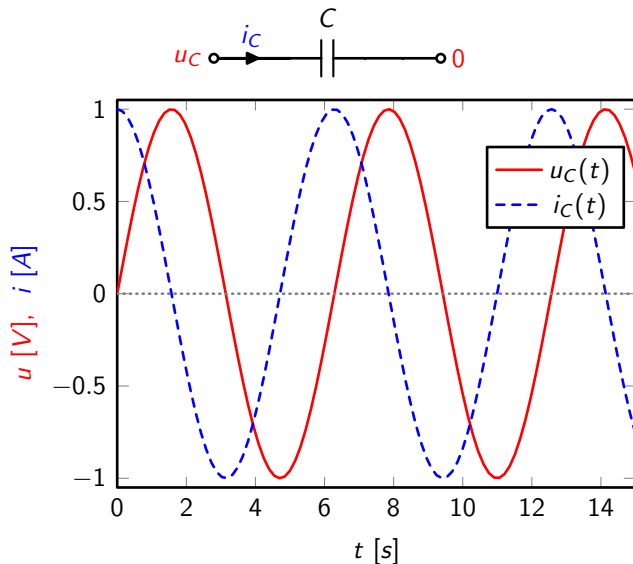
Rovnice:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad u_C(0) = 0$$

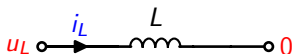
Řešení pro napětí $u_C(t) = \sin(\omega t)$:

$$i_C(t) = C \omega \cos(\omega t) = C \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Napětí a proud na kondenzátoru *nej*sou ve fázi.Proud "předbíhá" napětí, fázový posun je $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Kondenzátor — napětí a proud pro $\omega = 1$ a $C = 1F$ 

Cívka — rovnice a příklad řešení



Rovnice:

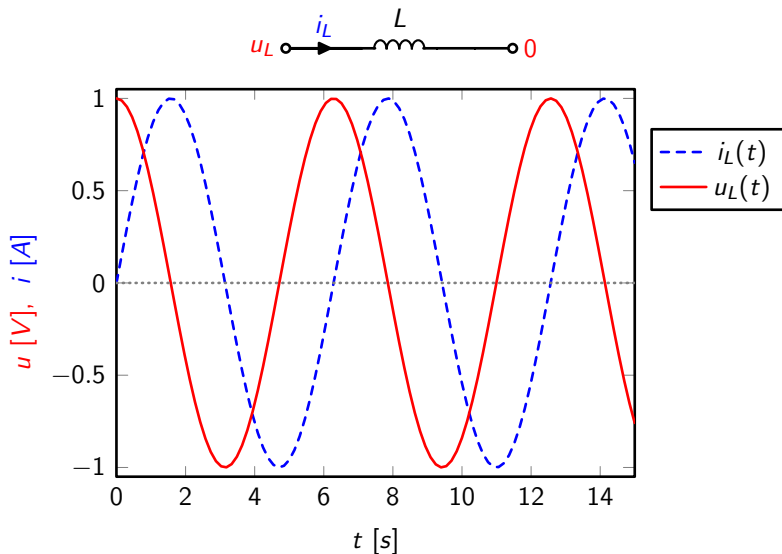
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad i_L(0) = 0$$

Řešení pro proud $i_L(t) = \sin(\omega t)$:

$$u_L(t) = L \omega \cos(\omega t) = L \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Napětí a proud na cívce *nejsou* ve fázi.

Napětí "předbíhá" proud, fázový posun je $\varphi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Cívka — napětí a proud pro $\omega = 1$ a $L = 1H$ 

Poznámky

Přehled

Rezistor: proud i napětí ve fázi

Kondenzátor: proud předbíhá napětí o 90°

Cívka: napětí předbíhá proud o 90°

- Příklady: simulace
- Test znalostí: nakreslete předchozí obrázky pro $\omega = 2$

Reaktance

Odpor R :

$$\frac{U_R}{I_R} = R$$

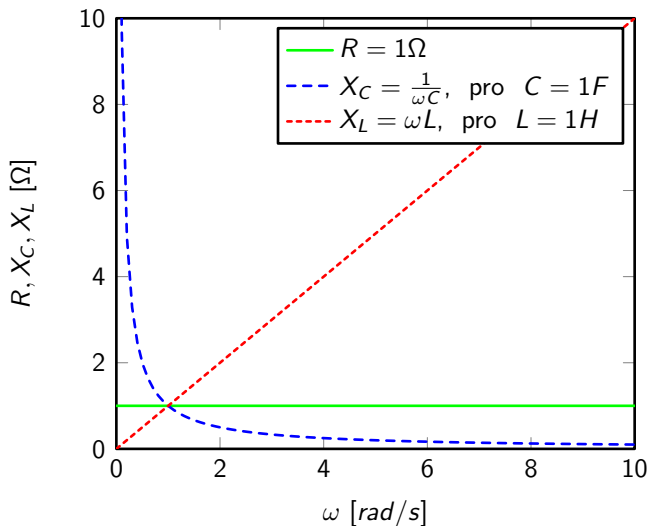
Kapacitní reaktance X_C :

$$\frac{U_C}{I_C} = X_C = \frac{1}{\omega C}$$

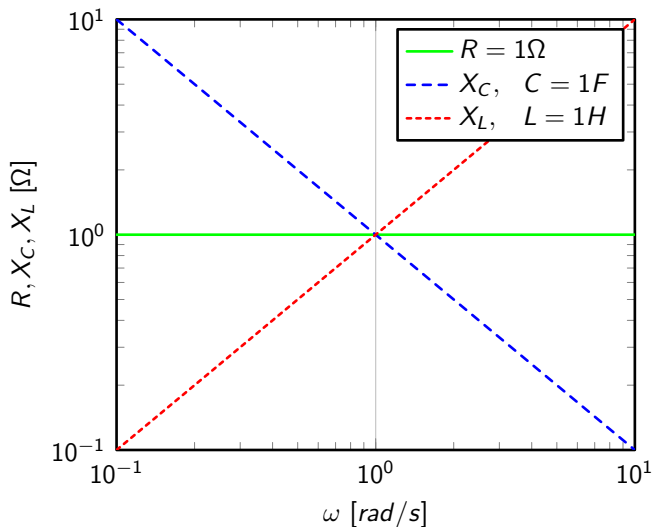
Induktivní reaktance X_L :

$$\frac{U_L}{I_L} = X_L = \omega L$$

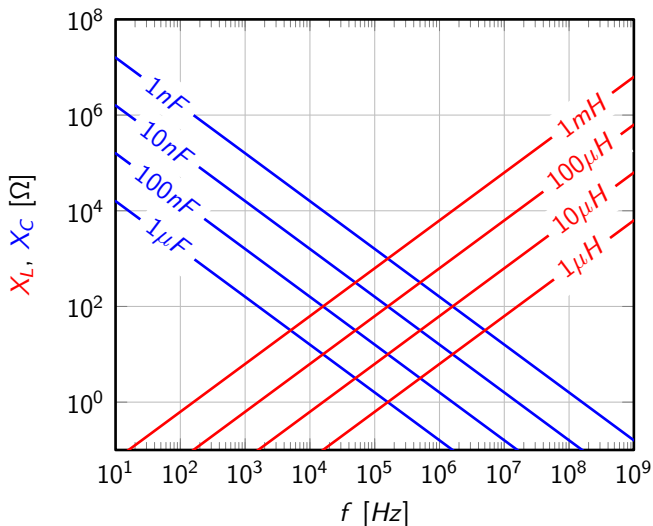
Závislost reaktance na frekvenci



Reaktance — logaritmické souřadnice



Reaktance kondenzátorů a cívek — výběr



Jednotka *decibel*

Poměrová jednotka *decibel* — definice:

- Poměr výkonu: $G_p = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ [dB]
([dBm] pro $P_1 = 1mW$)
- Poměr napětí: $G_u = 20 \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$ [dB]
(např. pro $U_1 = 0.775V$)

- Příklad1: Napěťové zesílení zesilovače (zisk)

$$G = \frac{U_2}{U_1} = 100000 \Rightarrow G_u = 100dB$$

- Příklad2: Útlum kabelu $G = \frac{U_2}{U_1} = 0.01 \Rightarrow G_u = -40dB$

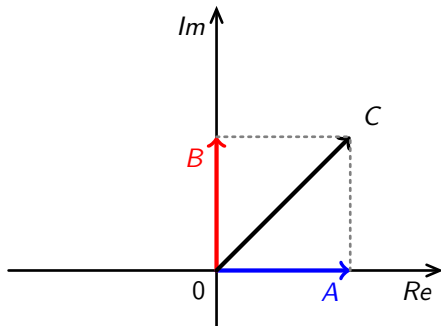
- Příklad3: Odstup signál/šum (SNR=Signal to Noise Ratio)

$$G = \frac{U_{sig}}{U_{noise}} = 1000 \Rightarrow SNR = 60dB$$

- Příklad4: $G = 2 \Rightarrow G_u \approx 6dB$

Fázory

Vyjádření amplitudy i fáze vektorem / komplexním číslem:



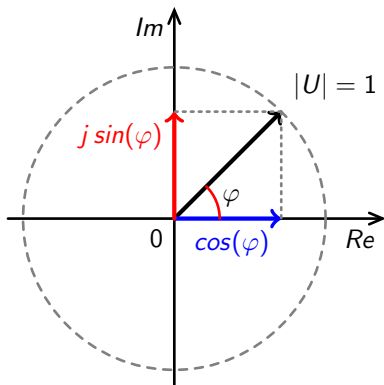
$$|A|^2 + |B|^2 = |C|^2$$

Poznámky: Operace + - */ , polární souřadnice

Fázor napětí

Komplexní vyjádření amplitudy a fáze střídavého napětí
(Pozor: j je jiné označení pro imaginární jednotku i)

$$u(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)} = A(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi))$$



Impedance

Impedance je komplexní číslo vyjadřující i fázový posuv

Impedance ideálního rezistoru

$$\mathbf{Z}_R = R$$

Impedance ideálního kondenzátoru

$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

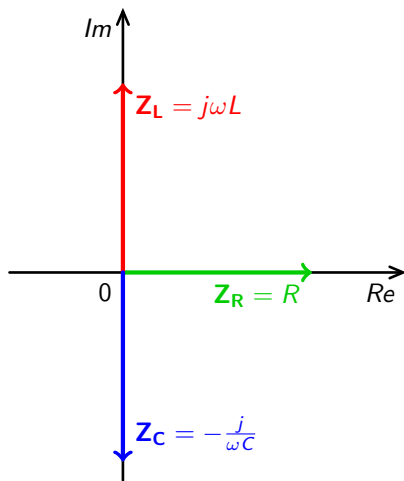
Impedance ideální cívky

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L$$

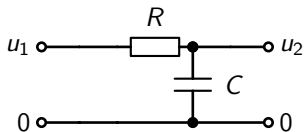
Poznámky:

- Reaktance je imaginární část impedance.
- Ohmův zákon platí i pro impedanci: $\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$

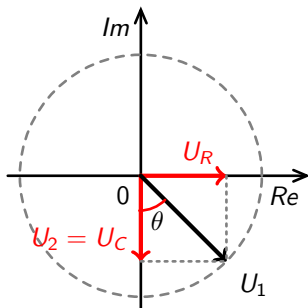
Impedance R, L, C — fázory



Integrační RC článek



Impedance RC článku: $Z_{RC} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$



Integrační RC článek — odvození přenosu

- 1 Uvažujeme pouze amplitudy napětí U a proudu I
- 2 Známe: $U_R = RI$, $U_C = X_C I = \frac{I}{\omega C}$
- 3 Z trojúhelníku napětí (viz obrázek) a Pythagorovy věty

$$U_1^2 = (RI)^2 + \left(\frac{I}{\omega C}\right)^2$$

vypočteme velikost proudu

$$I = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

a výstupní napětí

$$U_2 = U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{U_1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

- 4 Přenos signálu: $G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$

Integrační RC článek

Přenos signálu:

$$G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

Fáze:

$$\theta = -\tan^{-1} \left(\frac{U_R}{U_C} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{RI}{X_{CI}} \right) = -\tan^{-1}(\omega RC)$$

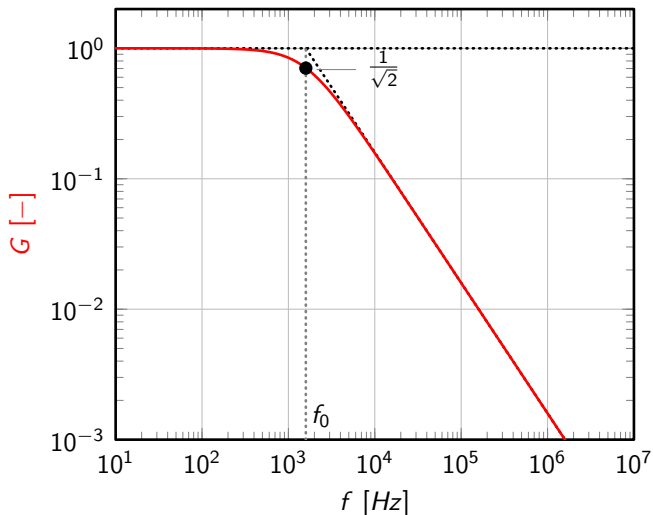
Mezní frekvence ($G_u = -3dB$, platí $U_R = U_C$):

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

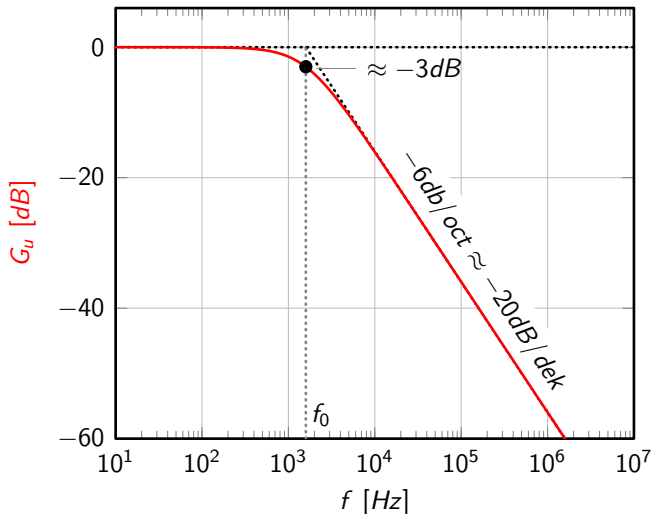
Integrační RC článek — frekvenční charakteristika

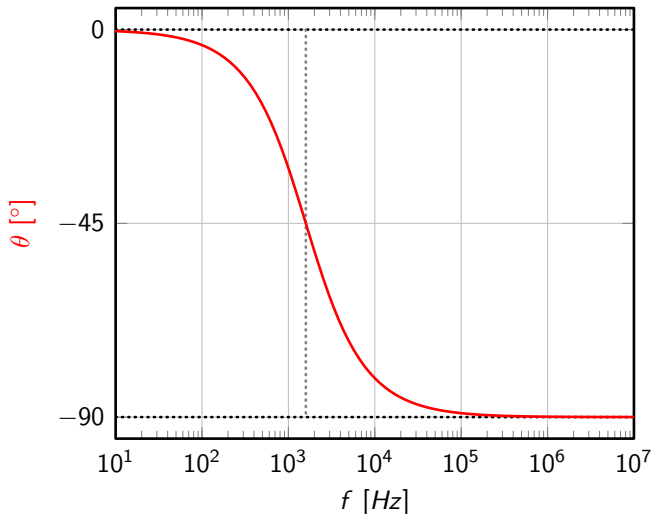
Přenos integračního RC ($R = 100\Omega$, $C = 1\mu F$)



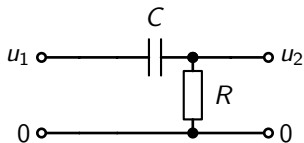
Bode plot — frekvenční charakteristika

Přenos integračního RC ($R = 100\Omega$, $C = 1\mu F$)

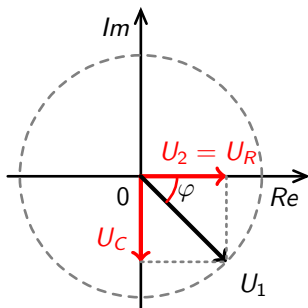


Integrační RC článek — fázový posuv $u_1 \rightarrow u_2$ Fáze integračního RC ($R = 100\Omega$, $C = 1\mu F$)

Derivační RC článek



Impedance RC článu: $Z_{RC} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - \frac{j}{\omega C}$



Derivační RC článek

Přenos:

$$G = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}}$$

Fáze:

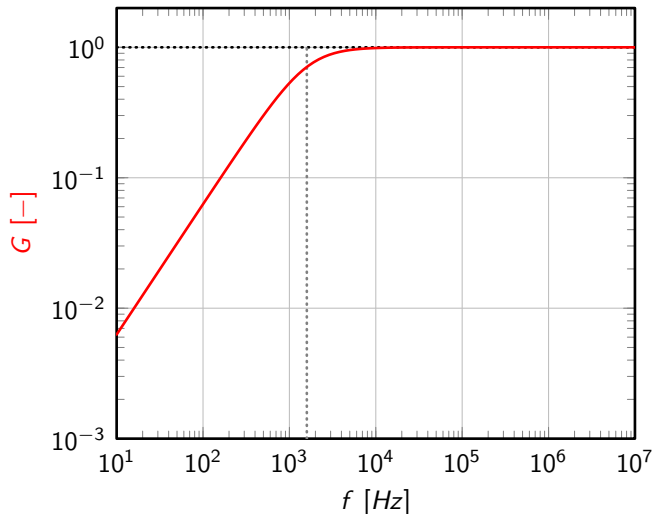
$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{U_C}{U_R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega RC} \right)$$

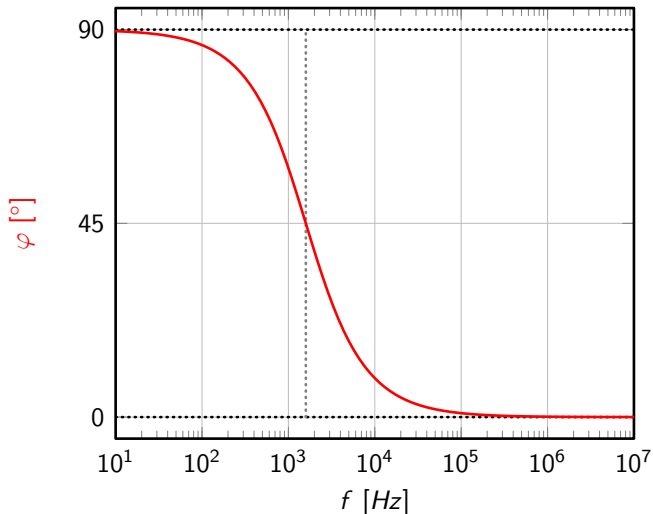
Mezní frekvence ($U_R = U_C$):

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

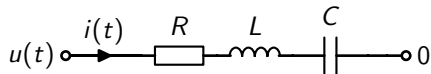
$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$$

Derivační RC článek — frekvenční charakteristika

Přenos derivačního RC ($R = 100\Omega$, $C = 1\mu F$)

Derivační RC článek — fázový posuv $u_1 \rightarrow u_2$ Fáze integračního RC ($R = 100\Omega$, $C = 1\mu F$)

Sériový RLC obvod



Rovnice

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

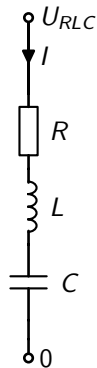
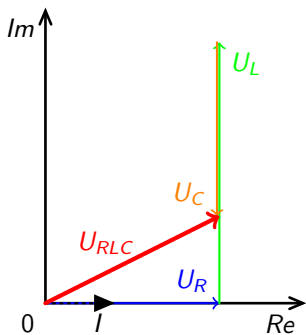
$$i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$$

Impedance:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$Z = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

Sériový RLC: fázory



Rezonance sériového RLC

Impedance RLC: $Z = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$

Podmínka rezonance:

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$$

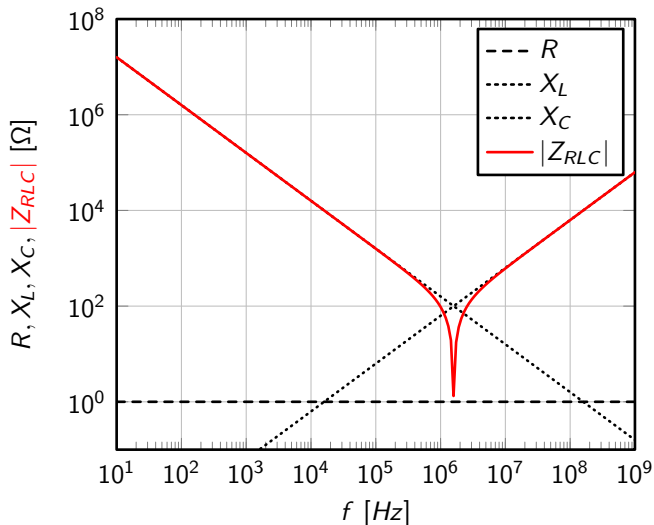
Z toho vypočteme rezonanční frekvenci:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

nebo po úpravě:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Frekvenční závislost impedance sériového RLC

Sériový RLC ($R = 1\Omega, L = 10\mu H, C = 1nF$)

Poznámky

- (Paralelní RLC)
- Příklady RC, RL, RLC: simulace
- Použití RC, RL, RLC článků:
 - Blokovací a vazební kondenzátory (RC)
 - Filtry:
 - dolní propust (*low-pass*),
 - horní propust (*high-pass*),
 - pásmová propust (*band-pass*)
 - pásmová zadrž (*band-stop*)
- Výkon (činný, jalový)
Činný výkon: $P = \operatorname{Re}(\hat{U}\hat{I}^*) = U_{ef} I_{ef} \cos(\varphi)$
Účinnost (*Power Factor*): $\cos(\varphi)$ (fázový posun proud–napětí)